Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Cattedra di Sicurezza degli impianti Industriali

Appunti del Corso di Sicurezza degli Impianti Industriali

Dispensa 8

PROBABILITÀ E AFFIDABILITÀ

Lorenzo Fedele

INDICE

1. ELEMENTI DI CALCOLO STATISTICO

La considerazione degli aspetti probabilistici e del calcolo statistico è di grande importanza in un molti problemi impiantistici, con specifico riferimento alla Sicurezza dei Sistemi produttivi.
Come si è visto nell'Unità 1 ponendo le basi dello studio della Sicurezza, le situazioni di pericolo a cui si deve fare fronte discendono dal verificarsi di guasti o dall'esposizione ad uno o più agenti nocivi. Le azioni da attuarsi per garantire le condizioni di Sicurezza sono, allora, di due tipi, preventive e protettive. Attraverso la **prevenzione** si cerca di ridurre il numero di guasti che possono occorrere; la **protezione**, invece, consiste nella riduzione della magnitudo del danno che gli infortuni possono produrre. Gli interventi di protezione si concretizzano con adatti mezzi, i più comuni fra i quali sono i mezzi personali di protezione (abbigliamento ed indumenti di protezione, protezioni particolari per i capelli, per il capo, per gli occhi, per le mani, per i piedi, e per altre parti del corpo, cinture di sicurezza e maschere respiratorie).
L'approccio statistico ai problemi impiantistici e, specificamente a quelli della Sicurezza, consente di trattare problematiche complesse di sistemi la cui evoluzione nel tempo non è facilmente prevedibile. La statistica, dunque, si propone come uno strumento di elevate potenzialità la cui applicazione può risultare vantaggiosa in molti casi e, principalmente, nello studio della prevenzione dei guasti, e quindi degli infortuni.
Alla luce della recente Legge 626/94, la quale richiede la realizzazione della cosidetta analisi e valutazione dei rischi, si comprende l'importanza che viene attribuita, anche dal Legislatore, a questa disciplina. Come si ricorderà, infatti, il **rischio** può essere espresso come il prodotto fra la probabilità di accadimento dell'evento sfavorevole (l'infortunio), e la **magnitudo** delle sue conseguenze. Tale grandezza, dunque, è strettamente correlata alla grandezza principe in Statistica, la probabilità. Scopo finale della Analisi del Rischio è la individuazione di una sequenza di eventi che può condurre all'infortunio.
Considerazioni di carattere statistico sono alla base, inoltre, dello studio dei concetti affidabilistici, applicati a macchine o componenti di macchina. Su tali aspetti, e sulle importanti conseguenze che lo studio dell'affidabilità può avere sul funzionamento di una macchina o sistema, si parlerà diffusamente nel seguito, quando si tratterà la teoria dell'affidabilità, intesa come ***serie di metodi statistici per la previsione***, ***stima ed ottimizzazione della probabilità di sopravvivenza e della durata media di vita di un sistema***.

2. STATISTICA E PREVENZIONE

Metodi statistici sono anche impiegati nell'elaborazione dei dati storici sugli infortuni, che assumono rilievo particolare in un'ottica sociale e di valutazione del danno economico derivante dal verificarsi degli infortuni, sia per le Aziende, sia per le compagnie assicurative.

La cognizione degli infortuni sul lavoro discende dalle denunce che il datore di lavoro è obbligato a formulare ogniqualvolta il lavoratore rimanga assente per più di 1 giorno (Art. 3 della Legge 242/96).
Infatti, sussiste l'obbligo, per i datori di lavoro soggetti all'obbligo dell'assicurazione contro gli infortuni, di comunicare all'Istituto assicuratore (INAIL) gli infortuni da cui siano colpiti i dipendenti. L'assicurato, a sua volta, è obbligato a dare immediata notizia di qualsiasi infortunio gli accada, anche se di lieve entità. Quando l'assicurato abbia trascurato di ottemperare all'obbligo predetto ed il datore di lavoro, non essendo venuto altrimenti a conoscenza dell'infortunio, non abbia fatto la denuncia, non è corrisposta l'indennità per i giorni antecedenti a quello in cui il datore di lavoro ha avuto notizia dell'infortunio (DPR 1124/65).
L'INAIL, in seguito alla denuncia, effettua una serie di interventi di carattere amministrativo, oltre che curativo e riabilitativo, da cui discendono i dati storici e statistici che vengono presentati in questa sede.
La conoscenza di tali informazioni è di fondamentale importanza per la definizione di una strategia preventiva che ha un riflesso morale, per la salvaguardia dei lavoratori, ma anche economico, per il pagamento dei premi assicurativi.
Prevenzione ed assicurazione, in tale senso, si presentano come due momenti contigui la cui considerazione contemporanea diviene estremamente importante, poiché gli interessi economici - in tale ottica - coincidono con gli interessi sociali ed umani, preservando forse questi ultimi maggiormente.
Con riferimento al 1990, si presentano nelle successive tabelle i dati infortunistici di maggiore interesse ed il modo come essi vengono trattati per la determinazione degli indici di frequenza.

	casi	**%**
casi mortali	1.423	0,1
inabilità permanente	38.362	4,1
inabilità temporanea	898.042	95,8
totale	937.827	100

Tabella 8.1 - Infortuni avvenuti nel 1990

La Tabella 8.1 illustra il numero di infortuni che si sono verificati in Italia nel 1990, evidenziando macroscopicamente il tipo di infortunio, la sua incidenza percentuale in relazione con la probabilità di accadimento di quel determinato tipo di infortunio.
La Tabella 8.2, invece, rappresenta il numero di infortuni che si sono verificati nel 1990 nelle varie regioni italiane, nei settori specifici Industria ed Artigianato; dalla Tabella, inoltre, è possibile desumere l'incidenza percentuale degli infortuni.

Regione	casi	%
Piemonte	62.147	8,6
Valle d'Aosta	2.477	0,3
Liguria	27.975	3,9
Lombardia	138.661	19,1
Trentino Alto Adige	16.756	2,3
Veneto	81.596	11,2
Friuli Venezia Giulia	22.724	3,1
Emilia Romagna	83.672	11,5
Toscana	67.101	9,2
Umbria	17.691	2,4
Marche	26.524	3,7
Lazio	35.898	4,9
Abruzzo	16.480	2,3
Molise	3.349	0,5
Campania	35.206	4,8
Puglia	32.063	4,4
Basilicata	4.835	0,7
Calabria	8.468	1,2
Sicilia	26.971	3,7
Sardegna	16.077	2,2
ITALIA	726.671	100

Tabella 8.2 - Infortuni nei settori Industria e Artigianato

La Tabella 8.3 illustra il numero di incidenti che si sono verificati nel 1990 nei singoli settori del comparto Industria ed Artigianato:

settore	casi	%	f[1]
lavorazioni agricole	33.225	4,9	52,31
chimica	41.707	6,1	37,99
costruzioni	143.006	20,9	58,80
elettricità	6.922	1,0	23,28
legno e affini	34.181	5,0	62,13
metallurgia	185.680	27,1	53,35
mineraria	32.764	4,8	71,82
tessile e abbigliamento	32.592	4,8	20,65
trasporti	55.439	8,1	34,89
varie (servizi)	118.455	17,3	12,14
totale	648.031	100	31,27

Tabella 8.3 - Infortuni nei settori Industria e Artigianato

[1] f rappresenta l'indice di frequenza per 1.000.000 di ore lavorate.

Nella successiva Tabella si evidenziano gli incidenti in relazione alle classi di età, con riferimento al medesimo anno (1990) ed ai medesimi settori di attività:

classe di età	casi	%
fino a 14	1.656	0,2
15 - 16	13.359	1,8
17 - 18	26.677	3,7
19 - 20	29.911	4,1
21 - 25	118.790	16,4
26 - 30	103.696	14,3
31 - 35	86.117	11,9
36 - 40	80.311	11,0
41 - 45	83.180	11,5
46 - 50	75.177	10,3
51 - 55	63.559	8,7
56 - 60	34.864	4,8
61 - 65	7.409	1,0
66 e oltre	1.965	0,3
totale	726.671	100

Tabella 8.4 - Infortuni con l'età

La Tabella 8.5 evidenzia l'epoca di accadimento degli incidenti durante i mesi dell'anno:

mese	casi	%
gennaio	56.820	7,8
febbraio	57.907	8,0
marzo	65.586	9,0
aprile	52.910	7,3
maggio	70.528	9,7
giugno	70.690	9,7
luglio	74.871	10,3
agosto	43.469	6,0
settembre	63.349	8,7
ottobre	68.525	9,4
novembre	58.198	8,0
dicembre	43.818	6,1
totale	726.671	100

Tabella 8.5 - Infortuni nei diversi mesi dell'anno

La lettura delle precedenti tavole pone in evidenza alcuni dati di interesse nell'analisi anti-infortunistica: emerge, infatti, che la Lombardia è Regione italiana in cui si verificano più incidenti sul lavoro, che i comparti della metallurgia e delle costruzioni sono fra i più pericolosi e che nella popolazione di età compresa fra 26 e 30 anni si verifica il maggior numero di incidenti.
La considerazione degli elementi appena visti può essere di grande aiuto nell'attuazione della prevenzione. Ancor più d'aiuto risultano le successive tabelle 8.6 e 8.7 che isolano le circostanze in cui si verificano gli incidenti ed il tipo di lesione che hanno prodotto. I dati, anche in questo caso, si riferiscono all'anno 1990:

situazione	**%**
macchine	9,3
mezzi di trasporto e sollevamento	11,4
impianti di distribuzione	-
attrezzature ed apparecchiature	14,5
materiali, sostanze e radiazioni	23,9
ambiente di lavoro	24,0
persone, animali e vegetali	1,1
recipienti e contenitori	4,3
parti di macchine	11,5
totale	100

Tabella 8.6 - Stuazioni ed infortuni

La Tabella che segue isola le parti del corpo ove si producono gli effetti degli infortuni, e distingue gli infortuni generici da quelli mortali. E' evidente come la considerazione di questi dati possa essere d'aiuto nello svolgimento dell'azione anti-infortunistica, con particolare riguardo alla progettazione di protezioni adeguate per le varie parti del corpo:

sede della lesione	casi non mortali	%	casi mortali	%
cranio	34.118	4,8	632	64,6
occhi	43.404	6,1	2	0,2
faccia	19.915	2,8	9	0,9
collo	1.135	0,2	4	0,4
cingolo toracico	20.416	2,9	9	0,9
parete toracica	23.435	3,3	92	9,4
organi interni	3.872	0,5	78	8,0
colonna vertebrale	41.017	5,7	58	5,9
braccio, avambraccio	26.846	3,7	3	0,3
gomito	13.394	1,9	2	0,2
polso	32.601	4,6	6	0,6
mano	263.658	36,8	18	1,9
cingolo pelvico	4.556	0,6	18	1,9
coscia	8.649	1,2	5	0,5
ginocchio	44.007	6,1	3	0,3
gamba	22.324	3,1	8	0,8
caviglia	40.782	5,7	11	1,1
piede	47.356	6,6	3	0,3
alluce	16.495	2,3	-	-
altre dita	7.547	1,1	-	-
altro	179	-	17	1,8
totale	715.706	100	978	100

Tabella 8.7 - Tipi di infortunio

Il grande numero di dati preso in considerazione consente di trarre interessanti conclusioni, utili nella valutazione degli infortuni e sulla loro prevenzione, anche in previsione dei costi che il loro accadimento può comportare.
Alcuni studi compiuti a livello europeo, infatti, dimostrano che gli investimenti effettuati per migliorare le condizioni di lavoro finiscono con l'assicurare un accrescimento sensibile della produttività in Azienda.
Uno dei primi aspetti da prendere in considerazione riguarda il clima di tensione che si può produrre a seguito di un incidente sul lavoro, tanto più se questo ha conseguenze gravi, o addirittura mortali. La ricaduta che tale situazione può produrre in termini di operosità, e quindi di produzione, è evidente.
Una Azienda ha come obiettivo prioritario la massimizzazione del profitto: tale obiettivo può essere raggiunto, tra l'altro, attraverso la riduzione degli sprechi, tra i quali quelli dovuti alla insufficiente sicurezza degli ambienti di lavoro. Tali oneri non sono facilmente oggetto di contabilizzazione, tuttavia la loro incidenza è significativa e vale la pena di tentare una schematizzazione utile in una valutazione di prima approssimazione:

spese direttamente imputabili alle lesioni

- primi soccorsi a carico dell'Azienda
- spese di trasporto della vittima
- sovvenzioni accordate alla vittima e alla famiglia
- spese relative alle pratiche amministrative e giuridiche
- salari versati alle vittime durante la loro assenza dal lavoro
- salari versati ad altri lavoratori durante il periodo della inattività degli infortunati
- rendimento iniziale ridotto del lavoratore che rimpiazza la vittima e sua formazione
- differenza di salario per i lavoratori che debbano sostituire la vittima di un infortunio ricoprendo un livello inferiore
- *spese causate da danni materiali collegati ad un infortunio*
- spese per danni ai materiali, alle costruzioni, agli equipaggiamenti, al prodotto finiti o semilavorato, etc.
- *perdite economiche collegate a perdite di produzione*
- perdite associate alla diminuzione di produzione a causa dei danni a cose o persone.

Da questo tentativo di contabilizzazione dei costi della sicurezza emerge chiaramente il gran numero di voci coinvolte, più o meno direttamente, e l'incidenza economica globale: è stato calcolato che gli infortuni sul lavoro costino alla collettività **43.460 miliardi di Lire annui**.

Ai costi sostenuti dal datore di lavoro, occorre aggiungere i costi che devono sostenere le imprese di assicurazione, costrette a rimborsare premi spesso elevati a fronte degli infortuni che si verificano.
La definizione di una adeguata polizza diviene in tal caso una condizione essenziale per la sopravvivenza economica delle compagnie assicurative, come pure per l'effettuazione di un corretto investimento da parte delle Aziende. Come già ricordato nell'Unita 1, gli interventi anti-infortunistici implicano una variazione nei livelli probabilistici e di magnitudo degli eventi e, al contempo, una spesa in termini di costi di investimento e di esercizio. La predisposizione delle misure di sicurezza, d'altronde, comporta una riduzione del rischio globale, il cui corrispettivo economico deve essere sempre maggiore od uguale alla spesa totale per la Sicurezza meno il risparmio sui costi assicurativi, conseguibile in virtù delle nuove dotazioni, perché sia vantaggioso l'investimento.
Gli aspetti economici coinvolti dalla Sicurezza in Azienda, in definitiva, sono molteplici ed essi possono risultare assai sostanziosi richiedendo l'effettuazione di attente analisi. A tale fine, gli strumenti forniti dalla moderna Statistica e da altre discipline impiantistiche correlate allo studio dei Sistemi Complessi possono essere di grande aiuto.

In questa sede si intende trattare diffusamente della Probabilità, ed accennare solamente alle tecniche impiantistiche che, basandosi sulla costruzione di un modello, conducono alla previsione vincolata dei fenomeni ed alla loro simulazione, od alla gestione "intelligente" dei sistemi.
Tali sono le **reti neurali**, così dette perché si ispirano ai principi biologici dei neuroni, cioè le celle costitutive del cervello, essendo il loro funzionamento basato su dei nodi che mostrano una sorprendente attitudine all'apprendimento dall'esperienza. In tal senso, appare possibile simulare e prevedere l'andamento dei fenomeni sulla base di una serie di dati che risulti significativa per il dispositivo previsore.
Di simile concezione, ma sostanzialmente diverso, è lo studio dei sistemi attraverso la cosidetta **logica fuzzy** o logica sfumata, che consiste nello studiare i sistemi complessi attraverso una logica moderna, in grado di superare alcuni dei problemi connessi con la complessità dei sistemi.

3. CALCOLO STATISTICO

Ai fini della presente trattazione, interessa soffermarsi sui concetti di base della statistica, la quale diviene uno strumento importante per la valutazione dei **rischi** (si ricordi che il rischio dipende dalla probabilità di accadimento degli eventi) e della **affidabilità** dei sistemi o componenti di sistema. La teoria dell'affidabilità, infatti, studia i problemi di previsione, stima ed ottimizzazione della probabilità di sopravvivenza, della durata media di vita, della percentuale di buon funzionamento dei sistemi, attraverso lo studio delle leggi di occorrenza dei guasti.

Una delle grandezze fondamentali su cui si basa la Statistica è la probabilità, la quale è stata introdotta per la prima volta nel diciassettesimo secolo con i giochi d'azzardo. Questi, per loro natura, implicano nel loro svolgimento una componente di incertezza sugli esiti delle giocate, che conduce appunto all'azzardo, cioè al rischio o pericolo di perdere la giocata. Questi giochi, dunque, prevedono lo svolgimento di azioni dall'esito incerto, ma con un ***esito di lungo termine prevedibile***. Ad esempio, si sa che dal lancio di una moneta sufficientemente simmetrica e bilanciata, ci si può aspettare una sostanziale equivalenza fra le volte che esce una faccia della moneta e l'altra.
Tale tipo di incertezza e di regolarità su di un arco temporale sufficientemente lungo, tale da consentire il ripetersi di numerosi eventi relativi al fenomeno che si sta analizzando, si verifica spesso nelle scienze sperimentali, rendendo interessante l'analisi statistica che diviene uno strumento prezioso e, in molti casi, essenziale.
La probabilità è stata oggetto di successive definizioni nel tempo, in seguito allo svilupparsi di nuove teorie e scuole di pensiero sulla disciplina statistica.
L'associazione fra probabilità e giochi d'azzardo ha suggerito, inizialmente, la **definizione classica** di probabilità:
se un fenomeno casuale può dar luogo, nel suo verificarsi ripetitivo, ad n eventi che si escludono a vicenda e ugualmente possibili, e se n_A di questi danno luogo al verificarsi dell'evento A, allora la probabilità che si verifichi A à data dal rapporto n_A/n.

Esempi classici sono il lancio di dado e l'estrazione di una carta da un mazzo di carte. Se consideriamo un dado con sei facce, gli eventi associati all'uscita di una faccia qualunque sono ugualmente probabili ed esclusivi (se esce una faccia, infatti, non può uscirne un'altra). Dunque la probabilità che esca una faccia dal lancio del dado, in base alla definizione fornita, è 1/6. Analogamente la probabilità che si estragga una certa carta da un mazzo composto da 52 carte è pari a 1/52.
La probabilità definita alla maniera classica è sempre un numero compreso fra 0 ed 1, essendo 0 quando si è certi che l'evento non si verifica ed 1 quando si è certi del contrario, cioè che l'evento si verifica.
La definizione classica fornita appare abbastanza immediata nell'applicazione, ma occorre prestare molta attenzione alle ipotesi poste: la probabilità classica, cioè, può essere calcolata solamente quando si abbia a che fare con eventi ugualmente probabili e mutuamente esclusivi.
Un altro limite della definizione classica si manifesta quando si incontrano domande del tipo: qual è la probabilità che un uomo muoia prima di 50 anni? Tale quesito è plausibile in statistica, ma non trova una risposta alla luce della probabilità classica. Per questo motivo si è sviluppata la teoria frequentista, che definisce una probabilità di più vasta applicabilità.
Si supponga di considerare l'esperimento del lancio di una moneta perfettamente bilanciata; come si è visto nella trattazione classica, la probabilità che esca una faccia o l'altra è circa la stessa, **a priori**. Se a questa considerazione teorica si fa seguire l'esperimento pratico, si scopre che il numero di volte che esce una faccia della moneta, o l'altra, è circa 1/2, ma non proprio 1/2. La definizione classica, infatti, fornisce una valutazione a priori; la definizione frequentista, invece, fornisce una valutazione della probabilità sulla base del verificarsi effettivo degli eventi, cioè della frequenza di accadimento di un determinato evento su un certo numero di tentativi. In tale senso, la probabilità p di accadimento di un evento viene approssimata dalla frequenza, che è un numero rappresentativo della probabilità, ma non è la probabilità effettiva dell'evento determinato.
Potendo concepire una serie di osservazioni od esperimenti in condizioni sufficientemente uniformi sul verificarsi di un evento A, dunque, può essere postulato un numero f, detto **frequenza relativa**, che approssima la probabilità p dell'evento.

Le teorie probabilistiche appena viste (classica e frequentista) hanno un elemento in comune: entrambi fanno riferimento ad eventi ripetibili in condizioni simili o abbastanza simili. Può accadere, però, di dovere valutare la probabilità di un evento non necessariamente ripetibile, o comunque ripetibile in condizioni non simili (ad esempio, può accadere di considerare la probabilità che scoppi la Terza Guerra Mondiale prima del 1998). Questo tipo di probabilità, che non fa riferimento ad eventi ripetibili in condizioni simili, bensì a fatti non oggettivi o pressoché unici, viene detta appunto **probabilità soggettiva**. Essa, come la probabilità classica e la frequenza relativa, rientra perfettamente nell'ambito della disciplina statistica poiché consente di valutare la probabilità di una certa classe di eventi, esattamente come avviene per le altre due grandezze già viste.

Il prossimo passo, dunque, consiste nel costruire un **modello di probabilità** che si fondi su degli **assiomi** di validità generale. La teoria che è alla base di tale modello ha una validità generale, tale da comprendere tutte le definizioni viste di probabilità.

La costruzione della teoria generale della probabilità richiede l'ausilio di uno strumento matematico importante, la **teoria degli insiemi**, a cui si fa riferimento nel seguito.
Si supponga di considerare la collezione di tutti gli oggetti che riguardano una certa trattazione (ad esempio, parlando di numeri, si considereranno tutti i numeri), detti nel seguito **elementi**. Tale collezione costituisce un insieme, in particolare costituisce l'**insieme universale W**.
Si considera successivamente una collezione particolare di oggetti facenti parte di W, la quale costituisce a sua volta un insieme A che è un **sottoinsieme** di W:

$$A \subset W \tag{8.1}$$

La 8.1 indica che l'insieme A è contenuto in W. Diversamente si potrebbe considerare un altro sottoinsieme B, di A questa volta, e scrivere:

$$B \subseteq A \tag{8.2}$$

che dice che B è contenuto in A e, al limite, può coincidere con esso. La trattazione degli insiemi può essere semplificata dal ricorso ai cosidetti diagrammi di Venn, che rappresentano graficamente le diverse situazioni. Ad esempio la 8.2 è rappresentata nella successiva Figura 8.1.

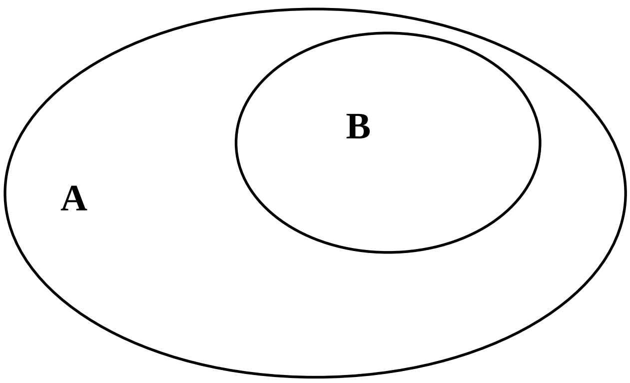

Fig. 8.1 - Rappresentazione di Venn di un insieme contenuto in un altro

L'insieme privo di elementi è detto **insieme vuoto** e si indica con il simbolo ϕ. Sugli insiemi, inoltre, è possibile definire alcune operazioni, l'unione, l'intersezione e la differenza.
L'**unione** di un insieme A ed uno B si indica con la seguente simbologia:

$$A \cup B \tag{8.3}$$

e dà luogo ad un altro insieme C, che è la collezione di tutti gli elementi che appartengono ad A o a B (Figura 8.2 o 8.3 nel caso di insiemi **disgiunti**).

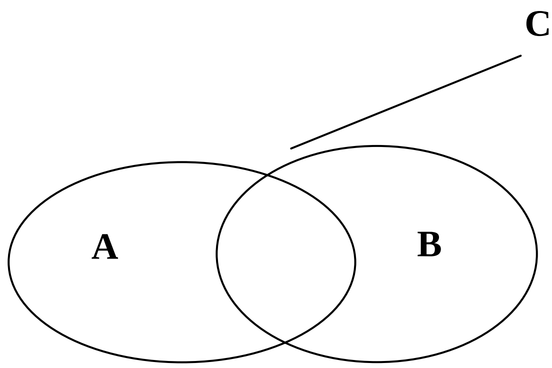

Fig. 8.2 - Operazione di unione fra due insiemi

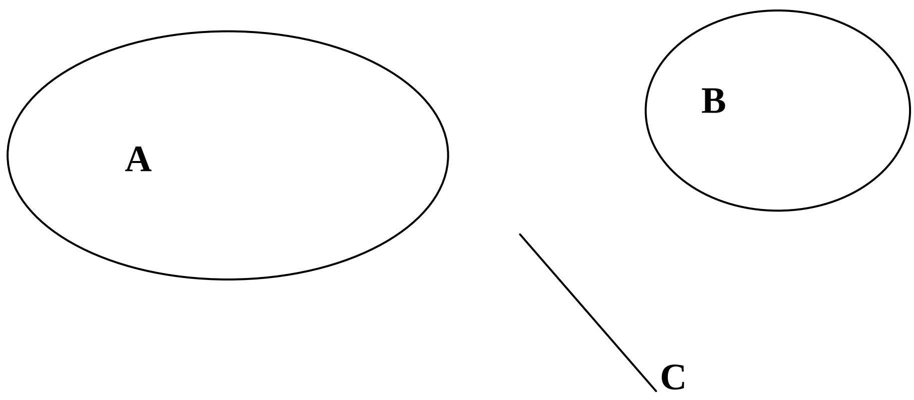

Fig. 8.3 - Operazione di unione fra due insiemi disgiunti

L'**intersezione** di due insiemi A e B rappresenta, invece, l'insieme C degli elementi che appartengono ad A e B allo stesso tempo (Figura 8.3):

$$A \cap B \tag{8.4}$$

E’ evidente, allora, che l’intersezione di due insiemi disgiunti è pari all’insieme vuoto ϕ.

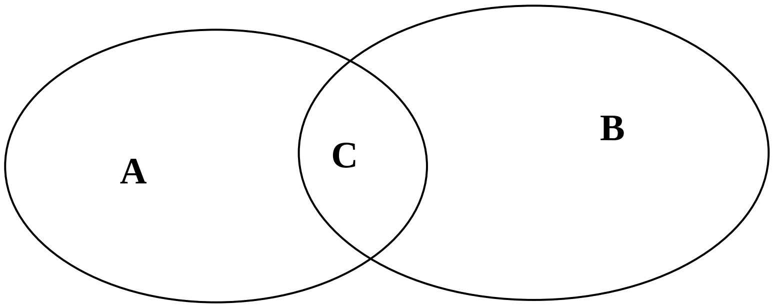

Fig. 8.4 - Operazione di intersezione fra due insiemi

L’operazione di **differenza** (8.5) di due insiemi A e B rappresenta l’insieme i cui elementi sono la differenza fra gli elementi dei due insiemi di partenza, cioè l’insieme degli elementi di A che non sono presenti in B:

$$A - B \tag{8.5}$$

Un insieme $\overline{A}$, infine, è **complementare** di un altro insieme A se è costituito da tutti gli elementi che appartengono all’insieme universale W ma non ad A.

Gli accenni fatti alla teoria insiemistica e, soprattutto, l’introduzione delle rappresentazioni grafiche dovute a Venn, aiutano alla costruzione della teoria probabilistica che segue, di tipo assiomatico e generale.
Si definisce lo **spazio campionario** come la collezione o la totalità di tutti i possibili risultati di un esperimento, ove la parola campionario sta ad indicare il fatto che il risultato di un esperimento è un **campione** di tutti i risultati possibili.
Un sottoinsieme dello spazio campionario appena visto costituisce un **evento**, e la famiglia di tutti gli eventi associati ad uno specifico esperimento rappresenta lo **spazio degli eventi** o insieme completo degli eventi.
La probabilità, secondo il punto di vista assiomatico, è dunque una funzione fra insiemi che gode di alcune proprietà particolari. Assegnato lo spazio campionario □ e lo spazio degli eventi A associato ad un certo esperimento, la probabilità di un generico evento E, sottoinsieme di A, è un numero p tale che:

1. $p(E) \geq 0$;
2. $p(E) \leq 1$;
3. $p(E) = 1$ se l’evento è certo;
4. dati due eventi A e B è:
5.

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B) \tag{8.6}$$

5. dati due eventi A e B:

$$p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B) = p\,(B/A) \cdot p(A) \tag{8.7}$$

Gli assiomi 4 e 5, in quanto tali, non sono dimostrabili ma possono essere visualizzati alla luce della teoria insiemistica. L'assioma 5, inoltre, introduce la **probabilità condizionale p(A/B)**, cioè la probabilità che si verifichi un evento A sapendo che l'evento B si è verificato.

Dall'assioma 4 discende il **teorema delle probabilità totali**: se due eventi A e B sono incompatibili (cioè mutuamente esclusivi, $p(A \cap B) = 0$) allora la probabilità del verificarsi dell'uno dell'altro è la somma delle probabilità di ciascuno dei due eventi

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \tag{8.8}$$

Dall'assioma 5, invece, discende il **teorema delle probabilità composte**: se due eventi A e B sono indipendenti, allora la probabilità che si verifichino contemporaneamente è pari al prodotto delle probabilità associate ai singoli eventi

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \tag{8.9}$$

Assegnato uno spazio degli eventi, se tutti gli eventi che si possono verificare sono mutuamente esclusivi, in base alla 8.7, si ha:

$$\sum_i p(E_i) = p(E_1) + p(E_2) + \ldots = 1 \tag{8.10}$$

Le espressioni trovate, alcune assiomatiche altre dimostrabili, costituiscono una risorsa importante per l'effettuazione dei calcoli probabilistici.

La frequenza di un evento associato ad un certo sistema, come anticipato, costituisce un'approssimazione della probabilità di quell'evento, utile per considerare a posteriori, cioè sulla base di esperienze reali, tale grandezza. La **legge dei grandi numeri**, o **legge empirica del caso**, afferma che la frequenza di un evento associato ad una serie di prove effettuate su un sistema è pari alla sua probabilità se il numero delle prove è molto grande:

$$\lim_{n \to \infty} f = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{N} = p \tag{8.11}$$

ove N è il numero di esperimenti effettuato e n il numero di volte che si è verificato l'evento prestabilito.

La trattazione delle probabilità condizionali induce ad introdurre il **teorema di Bayes** (da qualcuno chiamato teorema della probabilità delle cause): assegnati due eventi R e S, vale l'assioma 8.7 da cui discende l'espressione:

$$p(R/S) = \frac{p(R \cap S)}{p(S)} = \frac{p(S/R) \cdot p(R)}{p(S)} =$$
$$= \frac{p(S/R) \cdot p(R)}{p(S/R) \cdot p(R) + p(S/\overline{R}) \cdot p(\overline{R})} \qquad (8.12)$$

Tale teorema trova una importante applicazione nel caso della accettazione di risorse produttive (materie prime) in una Azienda: supponendo che R significhi possedere requisiti qualitativi elevati e S avere superato una certa prova, p(R/S) rappresenta la probabilità che un materiale che ha superato una certa prova possieda effettivamente i requisiti richiesti.
In genere, si è interessati ad una **distribuzione di probabilità** piuttosto che ad un singolo valore di questa grandezza, cioè ad una distribuzione dei valori della probabilità associati ad un **insieme completo di eventi**.
Tutte le probabilità espresse nella distribuzione di valori devono essere comprese fra 0 ed 1 e devono essere tali che la loro somma sia pari ad 1 (**proprietà di chiusura**)

$$\sum_i p_i = 1 \qquad (8.13)$$

In particolare, supponendo di considerare un insieme di numeri X posto in corrispondenza biunivoca con un insieme completo di eventi, è possibile valutare la probabilità associata al manifestarsi di uno di questi numeri. Il generico x appartenente a tale insieme numerico viene detto **variabile aleatoria** e può assumere valori **discreti** oppure **continui**.
Per comprendere il significato di una variabile aleatoria, si consideri il seguente caso particolare: un disco può ruotare intorno al suo centro ed ha un raggio tracciato in modo da essere facilmente visibile; assegnata un’ascissa angolare (cioè un riferimento fisso rispetto alla rotazione del disco), la variabile aleatoria (in questo caso continua) è l’angolo che durante la rotazione forma il raggio visibile rispetto al riferimento fisso; ci si chiede quale sia l’angolo alla fine della generica rotazione imposta. Evidentemente, se la rotazione è imposta casualmente, anche l’angolo formato dal raggio predeterminato con il riferimento fisso avrà, alla fine della rotazione, un valore casuale; poiché tale angolo può assumere con continuità valori differenti, si ha a che fare con una variabile aleatoria continua.
Assegnata una variabile aleatoria, si può considerare una sua generica distribuzione (Figura 8.4) e le grandezze caratteristiche, il valore atteso, o speranza matematica o valore medio, la varianza o scarto quadratico medio, e la sua radice quadrata, la deviazione standard.
Il **valore atteso** $\overline{x}$ rappresenta il valore baricentrico della distribuzione, dunque il valore di x più probabile. Indicando con D(x) la densità di probabilità ($D(x) = \frac{dp}{dx}$), cioè la probabilità infinitesima associata ad una variazione infinitesima di x, risulta:

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot D(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} D(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot D(x)\,dx \qquad (8.14)$$

La **varianza σ^2** una grandezza indicativa dello scostamento dei valori della distribuzione dal valore più probabile, cioè il valore atteso. Essa, in sostanza, fornisce una valutazione della “apertura” del diagramma della funzione di distribuzione e la sua espressione è la seguente:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot D(x)\,dx \qquad (8.15)$$

Dalla 8.14 discende la **deviazione standard σ**:

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot D(x)\,dx} \qquad (8.16)$$

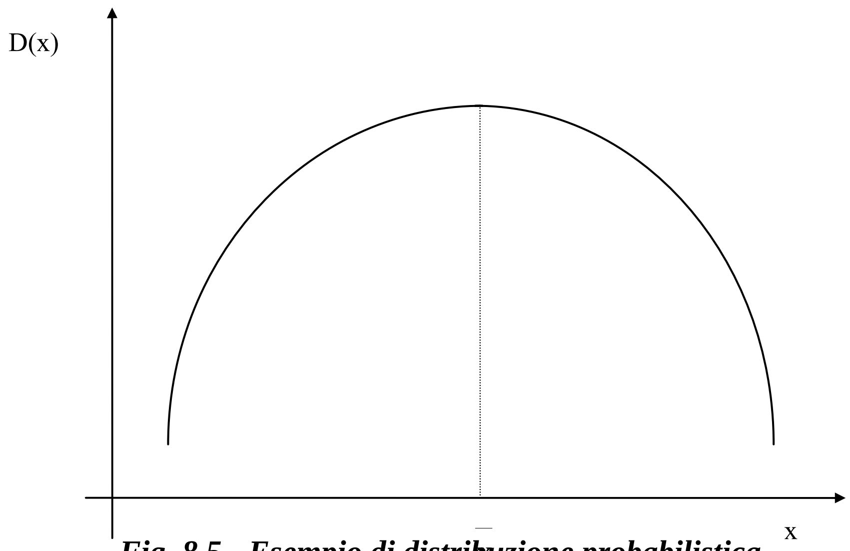

Fig. 8.5 - Esempio di distribuzione probabilistica

Assegnata una certa distribuzione probabilistica è possibile risalire alla cosidetta funzione di ripartizione F(x), che rappresenta che l’evento si verifichi dall’origine prescelta, in genere $-\infty$ ed x:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} D(x)\,dx \qquad (8.17)$$

Nel seguito si illustrano le più comuni funzioni di distribuzione.
La **distribuzione di Bernoulli** o **binomiale** è una distribuzione discreta, espressa dalla seguente espressione:

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \qquad (8.18)$$

Infatti, si consideri due eventi E_1 ed E_2, e sia p la probabilità costante di E_1 e q la probabilità costante di E_2, con $p + q = 1$, per la proprietà di chiusura. Eseguendo n prove indipendenti, sia k il numero di volte che si verifica l'evento E_1; k è una variabile aleatoria discreta che può assumere i valori 0, 1 ,2 ...n. La probabilità che in n prove si presenti una certa sequenza è $p^k \cdot q^{n-k}$, mentre il numero di sequenze in cui E_1 compare k volte è dato dal coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Allora, essendo le n prove indipendenti, in base al teorema delle probabilità composte risulta valida la 8.17. Il valore atteso è

$$\bar{k} = n \cdot p \qquad (8.19)$$

e la varianza

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q \qquad (8.20)$$

La **distribuzione di Poisson** è anch'essa una distribuzione discreta. Assegnata una variabile aleatoria discreta k, risulta:

$$p(k) = \frac{m^k \cdot e^{-m}}{k!} \qquad (8.21)$$

$$\bar{k} = \sigma^2 = m \qquad (8.22)$$

Tale funzione di distribuzione si manifesta soprattutto in presenza di eventi rari, perciò è anche detta distribuzione degli eventi rari.

La **distribuzione di Gauss**, o **normale**, è fra le più comuni. Si dice che una assegnata variabile aleatoria continua segue la legge di Gauss se risulta:

$$D(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \qquad (8.23)$$

Il valore medio risulta essere:

$$\bar{x} = m \qquad (8.24)$$

La rappresentazione grafica della funzione normale è fornita nella Figura 8.5.

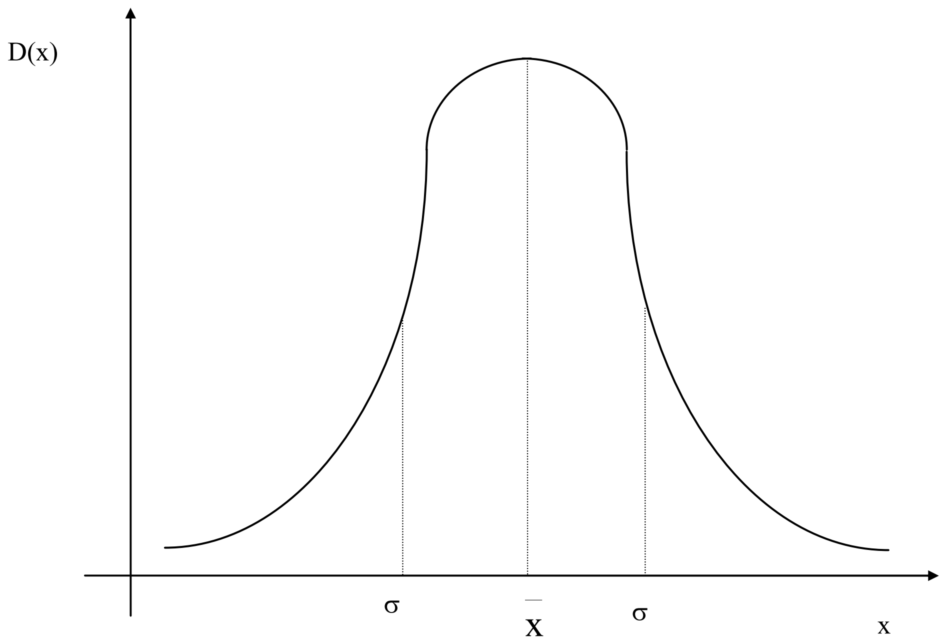

Fig. 8.6 - Distribuzione di Gauss o normale

La **distribuzione esponenziale** si concretizza quando la variabile aleatoria continua x è caratterizzata dalla seguente densità di probabilità:

$$D(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \quad \text{con } \lambda > 0 \qquad (8.25)$$

ed il valore atteso e la varianza sono date dalle seguenti espressioni:

$$\bar{x} = \frac{1}{\lambda} \qquad (8.26)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (8.27)$$

4. ELEMENTI DI AFFIDABILITÀ

La **teoria dell'affidabilità** studia il comportamento dei sistemi e dei componenti di sistema, cercando di appurare la ***vita media***, la ***sopravvivenza*** e la ***percentuale di buon funzionamento di un sistema***.

L'affidabilità, oltre ad essere un potente ed importante strumento per la sicurezza dei sistemi di produzione, si rivela anche un valido aiuto nella definizione della *qualità dei processi*. Esistono situazioni industriali, ed in genere lavorative, che non comportano particolari rischi; eppure, l'affidabilità del processo costituisce un elemento competitivo essenziale nei confronti del mercato, al fine di offrire a questo un prodotto di elevato livello qualitativo.
L'affidabilità (in inglese ***reliability***) è funzione dello stato del componente C (cioè se il componente è guasto o meno, o in che condizioni si trova[2]), dalle condizioni ambientali e dalle sollecitazioni cui è soggetto A e del tempo t:

$$R = R(C, A, t) \qquad (8.28)$$

Considerato un numero costante di componenti di uno stesso tipo, il numero di componenti vivi al tempo t ed il numero di componenti guasti allo stesso istante, risulta essere:

$$N_o = N_v(t) + N_g(t) \qquad (8.29)$$

Si può di conseguenza definire R(t) come il rapporto:

$$R(t) = \frac{N_v(t)}{N_o} \qquad (8.30)$$

e l'**inaffidabilità** F(t):

$$F(t) = \frac{N_g(t)}{N_o} = 1 - \frac{N_v(t)}{N_o} = 1 - R(t) \qquad (8.31)$$

F(t) ed R(t), dunque, sono delle funzioni di probabilità. La densità di probabilità della inaffidabilità f(t) è:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1-R(t))}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \qquad (8.32)$$

Il prodotto $f(t) \cdot dt$, dunque, rappresenta la probabilità che il componente considerato si guasti nell'intervallo di tempo compreso fra t e t +dt. Considerando una generica funzione di distribuzione della inaffidabilità nel tempo, dunque, si vede che l'area sottesa dalla curva dal tempo iniziale (assunto t = 0) ed il tempo t rappresenta il valore

2 Ciò è facile se si ha a che fare con **componenti bistabili**, cioè caratterizzati dal fatto che possono funzionare o meno; è meno facile se lo stato del componente può variare con continuità fra la condizione di non funzionameto e la condizione di funzionamento.

di F(t), che è una probabilità di guasto e rappresenta, effettivamente, il numero di componenti del tipo prescelto fra il tempo t = 0 ed il tempo t (Figura 8.6).

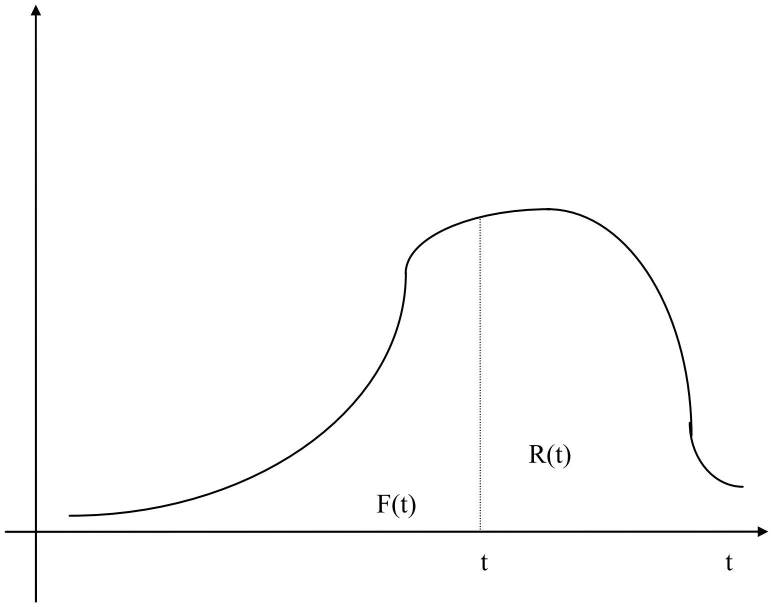

Fig. 8.7 - Distribuzione dell'inaffidabilità

Un'altra grandezza molto importante è il **tasso di guasto** Z(t), che è in relazione con la probabilità condizionale $Z(t) \cdot dt$ che un componente sopravvissuto fino al tempo t si guasti al tempo t + dt. Questa grandezza, dunque, che non è una densità di probabilità, si differenzia dalla densità dell'inaffidabilità che fa riferimento, infatti, all'intera popolazione dei componenti, mentre $Z(t) \cdot dt$, invece, fa riferimento alla popolazione sopravvissuta, minore o al limite uguale alla popolazione totale.
In base alla definizione data, dunque, vale la seguente espressione:

$$Z(t) \cdot dt = \frac{\text{probabilità guasto in}[t, t+dt]}{\text{probabilità non guasto in}[0, t]} =$$

$$= \frac{\text{probabilità guasto in}[t, t+dt]\text{ e probabilità non guasto in}[0, t]}{\text{probabilità non guasto in}[0, t]} =$$

$$= \frac{\text{probabilità guasto in}[0, t+dt] - \text{probabilità guasto in}[0, t]}{R(t)}$$

e quindi:

$$Z(t) \cdot dt = \frac{-R(t+dt) - (-R(t))}{R(t)} = -\frac{dR(t)}{R(t)} = \frac{f(t) \cdot dt}{R(t)} \qquad (8.33)$$

da cui discende la seguente espressione:

$$f(t) = Z(t) \cdot R(t) \qquad (8.34)$$

e dalla 8.33 discende:

$$R(t) = e^{-\int_0^t Z(t)\,dt} \qquad (8.35)$$

Alcuni componenti sono caratterizzati dalla cosidetta **proprietà di non memoria** dal punto di vista affidabilistico. Cioè, per essi il tasso di guasto si mantiene costante nel tempo, e non dipende dal particolare istante preso in considerazione. Se il tasso di guasto è costante ne discende che la affidabilità R(t) è caratterizzata da una funzione di distribuzione di tipo esponenziale. La situazione del tasso di guasto costante è visibile nella successiva Figura 8.8, ove è rappresentata la cosidetta "bath tube curve" (curva a vasca da bagno).

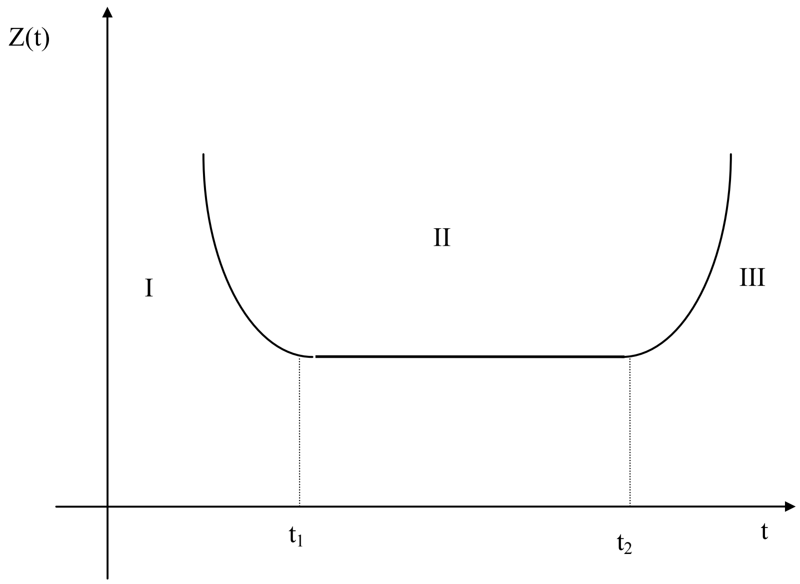

Fig. 8.8 - Curva usuale del tasso di guasto

La regione I è caratteristica dei componenti che sono stati malamente concepiti o progettati male. La regione II è caratteristica dei componenti a tasso di guasto costante, nei quali il guasto si manifesta in modo casuale (componenti elettronici). La regione III è la zona tipica dei componenti meccanici, caratterizzati dal fenomeno dell'usura. Nell'ambito della regione II, dunque, la distribuzione dell'inaffidabilità è di tipo esponenziale. La condizione di tasso di guasto costante può realizzarsi anche in presenza di un sistema di componenti, o a tasso di guasto costante, ovviamente, o a tasso di guasto variabile in modo che si possa considerare il contributo complessivo (il tasso di guasto del sistema è pari alla somma dei tassi dei singoli componenti) circa nullo. In caso di tassi di guasto variabili, la distribuzione affidabilistica più rappresentativa appare quella di **Weibull**:

$$\frac{dR(t)}{dt} = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \qquad \text{per } t \geq \gamma$$

$$R(t) = 1 \qquad \text{per } t < \gamma \qquad (8.36)$$

essendo γ la vita minima (tempo entro il quale non si verificano guasti)
η la vita caratteristica (in tale intervallo di tempo si guasta il 63,2% della popolazione)
β un parametro di forma.

Normalmente si assume $\gamma = 0$.
Nella zona III, tipica dei componenti meccanici, appare sensato considerare, quale distribuzione della inaffidabilità, la distribuzione normale o gaussiana.
Un intervento di manutenzione preventiva consente di migliorare l'affidabilità di un componente come si può vedere nella successiva Figura 8.9.

5. AFFIDABILITÀ DEI SISTEMI

Un **sistema** è un insieme di elementi o componenti caratterizzati da particolari condizioni funzionali ed affidabilistiche, ciascuno dei quali contribuisce a realizzare il funzionamento del sistema complessivo con un certo livello affidabilistico.

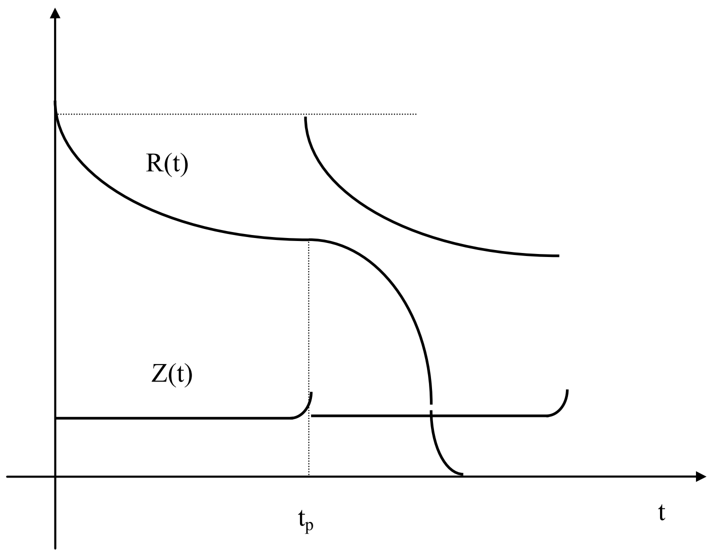

Fig. 8.9 - Intervento di manutenzione preventiva

I sistemi possono essere analizzati con una metodologia "top down", attraverso la quale lo si scompone e lo si semplifica, o "bottom up", che conduce alla

determinazione del livello affidabilistico del sistema globale a partire dalla considerazione delle singole affidabilità dei componenti.
I sistemi possono essere classificati in 4 grandi categorie:

1. **sistemi non riparabili**, nei quali il verificarsi del guasto rappresenta una transizione irreversibile, e danno luogo agli studi affidabilistici in senso stretto;
2. **sistemi riparabili**, che comportano il succedersi casuale di situazioni di funzionamento e di guasto, da cui discende lo studio della disponibilità;
3. **sistemi non ridondanti**, anche detti sistemi serie, nei quali il verificarsi del guasto di un componente comporta il guasto di tutto il sistema;
4. **sistemi ridondanti**, anche detti sistemi parallelo, che non si guastano anche se si guasta un componente.

Nei sistemi non riparabili è importante individuare il parametro **Mean Time To Failure** (**MTTF**) che esprime il tempo in cui si verifica il guasto a partire da un tempo t = 0 in cui il componente è funzionante.
MTTF, evidentemente, rappresenta il valore medio della distribuzione di probabilità della inaffidabilità F(t):

$$\mathrm{MTTF} = \int_0^\infty t \cdot f(t)\,dt = -\int_0^\infty t \cdot \frac{dR(t)}{dt}\,dt = \int_0^\infty R(t)\,dt \qquad (8.37)$$

Nel caso dei componenti caratterizzati dalla cosidetta **proprietà di non memoria**, cioè dal tasso di guasto costante, λ la 8.37 diviene:

$$\mathrm{MTTF} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda} \qquad (8.38)$$

All'istante t = MTTF, risulta essere:

$$R(t) = R(\mathrm{MTTF}) = e^{-1} \approx 0{,}37 \qquad (8.39)$$

cioè la probabilità che un componente funzionante all'istante iniziale (t = 0) non si guasti al tempo t = MTTF è pari a 0,37.

I sistemi non ridondanti, di tipo serie cioè, sono caratterizzati dal fatto che il guasto di un componente determina il non funzionamento del sistema. L'affidabilità del sistema non ridondante è pari al prodotto delle affidabilità dei singoli componenti:

$$R_S(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \ldots\ldots R_n(t) \qquad (8.40)$$

Se il tasso di guasto è costante ed è $R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, allora è:

$$R_S(t) = e^{-\lambda_S t} \qquad (8.41)$$

con $\lambda_S = \sum_i \lambda_i$, e

$$MTTF = \frac{1}{\lambda_S} \qquad (8.42)$$

L'affidabilità di un sistema serie, dunque, può essere incrementata agendo sul componente meno affidabile:

$$R_S + \Delta R_S = R_1 \cdot R_2 \cdot ......[R_i + \Delta R_i] \cdot .....R_n \qquad (8.43)$$

da cui:

$$R_S + \Delta R_S = R_S + R_S \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} \qquad (8.44)$$

e quindi:

$$\Delta R_S = R_S \cdot \frac{\Delta R_i}{R_i} \qquad (8.45)$$

I sistemi ridondanti, o di tipo parallelo, sono caratterizzati da un livello di affidabilità superiore, benché ciò comporti una maggiore complessità ed un maggior costo.
Tali sistemi possono essere di due tipi: sistemi caratterizzati da **ridondanza attiva**, nei quali i componenti ridondanti svolgono un ruolo funzionale, e sistemi caratterizzati da **ridondanza passiva**, i cui componenti entrano un funzione solo in caso di guasto[3].

Nel caso di ridondanza attiva, deve valere per il sistema e per i singoli componenti la relazione R(t) + F(t) = 1, e dunque:

$$(R_1 (t) + F_1 (t)) \cdot (R_2 (t) + F_2 (t)) \cdot ....= 1 \qquad (8.46)$$

Sviluppando il prodotto nel caso di 3 componenti, ad esempio, si ottiene:

$$\begin{aligned} &R_1R_2R_3 + (R_1R_2F_3 + R_1F_2R_3 + F_1R_2R_3) + \\ &+ (R_1F_2F_3 + F_1R_2R_3 + F_1F_2R_3) + F_1F_2F_3 = 1 \end{aligned} \qquad (8.47)$$

ove il primo addendo rappresenta il caso in cui i tre componenti sono funzionanti, il secondo il caso in cui due componenti sono funzionanti ed uno guasto, il terzo il caso

[3] L'intervento del dispositivo ridondante si manifesta grazie all'azione svolta da un apposito commutatore.

in cui due componenti su tre sono guasti ed il quarto, infine, il caso in cui tutti i componenti sono guasti.
Se i tre componenti sono uguali, discende la seguente espressione:

$$R^3 + 3 \cdot R^2 \cdot F + 3 \cdot R \cdot F^2 + F^3 = 1 \qquad (8.48)$$

In particolare, se i componenti del sistema sono identici ed indipendenti, interessa studiare il caso in cui il sistema sia funzionante se sono funzionanti m componenti su n. In tal caso, la affidabilità del sistema è caratterizzata da una distribuzione discreta di tipo binomiale:

$$R_S(t) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} R^k \cdot (1-R)^{n-k} \qquad (8.49)$$

L'inaffidabilità di un sistema parallelo è pari al prodotto delle inaffidabilità dei componenti:

$$F_S(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot \ldots\ldots F_n(t) \qquad (8.50)$$

da cui discende la relazione delle affidabilità:

$$1 - R_S(t) = (1 - R_1(t)) \cdot (1 - R_2(t)) \cdot \ldots\ldots (1 - R_n(t)) \qquad (8.51)$$

Nel caso in cui il ***tasso di guasto dei componenti è costante***, è agevole calcolare il tasso di guasto di tutto il sistema. Ad esempio, nel caso di 2 componenti uguali:

$$R_S(t) = 2 \cdot e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t} \qquad (8.52)$$

$$f_S(t) = 2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} - 2 \cdot \lambda\, e^{-2\lambda t} \qquad (8.53)$$

$$Z(t) = \frac{2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} - 2 \cdot \lambda\, e^{-2\lambda t}}{2 \cdot e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}} \qquad (8.54)$$

Si trova, dunque, che l'affidabilità di un sistema parallelo dipende dal tempo, e quindi **non** è costante.
Con una dimostrazione analoga a quella vista per i sistemi serie, si può trovare, inoltre, che il miglioramento affidabilistico di un sistema parallelo passa per il miglioramento del suo componente migliore:

$$\frac{\Delta R_S}{\Delta R_i} = \frac{1 - R_S}{1 - R_i} \qquad (8.55)$$

A titolo esemplificativo di quanto fino ad ora visto, si consideri il confronto fra due configurazioni tipiche, la serie-parallelo e la parallelo-serie.
Il primo tipo di configurazione è rappresentato nella successiva Figura 8.10, ove si considerano 4 componenti uguali.

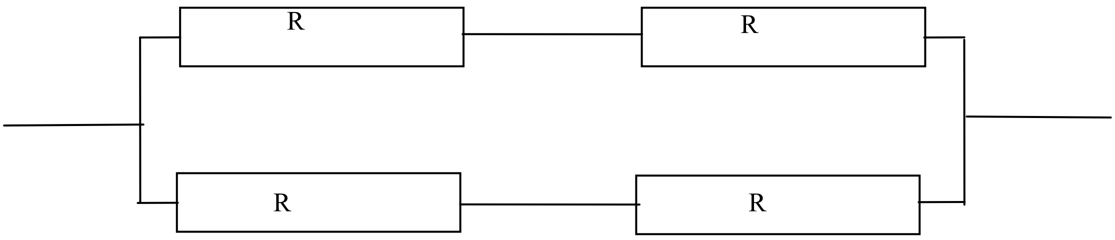

Fig. 8.10 - Configurazione serie-parallelo

L'affidabilità del sistema dato in Figura 8.10 è:

$$1 - R_{SP} = (1 - R^2) \cdot (1 - R^2)$$

$$R_{SP} = 2 \cdot R^2 - R^4 \qquad (8.56)$$

Il secondo tipo di sistema è rappresentato nella Figura 8.11.

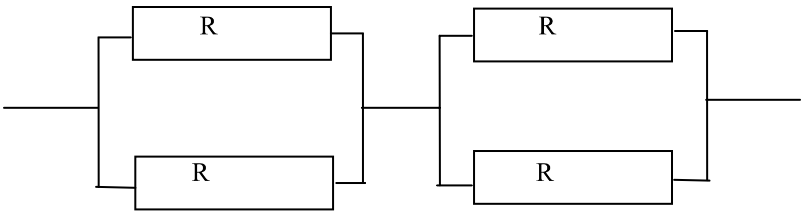

Fig. 8.11 - Configurazione parallelo-serie

Nel caso in cui i componenti siano uguali, l'affidabilità del sistema è pari a:

$$R_{PS} = (2 \cdot R - R^2) \cdot (2 \cdot R - R^2) = R^4 - 4 \cdot R^3 + 4 \cdot R^2 \qquad (8.57)$$

Dall'analisi dei due casi tipici appena visti emerge ***che la configurazione parallelo serie è, a parità di legge di guasto, maggiormente affidabile***.

I sistemi ridondanti di tipo passivo sono anche detti **sistemi stand by**. Essi sono caratterizzati dal fatto che durante il funzionamento alcuni componenti rimangono in stand by, appunto, ed entrano in funzione solamente in caso di guasto.
L'intervento dei componenti ridondanti passivi, come è già stato ricordato è determinato dall'azione di un opportuno commutatore oppure dall'intervento umano.

Per valutare l'affidabilità di un sistema stand by, si supponga che esso sia costituito da soli 2 componenti, A e B. Possono verificarsi due situazioni:

1. al tempo t, il componente A funziona regolarmente; la probabilità di questo evento è pari a $R_A(t)$;
2. il componente A si è guastato ad un istante x (con $0 \le x \le t$); il componente B ridondante è entrato regolarmente in funzione allo stesso istante e funziona al tempo t; la probabilità di questo secondo evento è pari a:

$$\int_0^t R_B(t-x) \cdot f_A(x)\, dx \qquad (8.58)$$

Gli eventi 1 e 2 appena visti sono mutuamente esclusivi; dunque, l'affidabilità del sistema si può scrivere, in base al teorema degli eventi totali dato in 8.8:

$$R_S(t) = R_A(t) + \int_0^t R_B(t-x) \cdot f_A(x)\, dx \qquad (8.59)$$

Se le affidabilità sono espresse da funzioni esponenziali, e quindi il tasso di guasto dei due componenti A e B sono costanti ed uguali, si ha:

$$\begin{aligned} R_S(t) &= e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} = \\ &= e^{-\lambda t} + \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \qquad (8.60) \end{aligned}$$

Il parametro MTTF, invece, è:

$$MTTF = \int_0^\infty R_S(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt + \int_0^\infty \lambda t \cdot e^{-\lambda t}\, dt = \frac{2}{\lambda} \qquad (8.61)$$

Nel caso in cui i componenti siano diversi ed abbiano un diverso tasso di guasto, risulta invece essere:

$$MTTF = \frac{1}{\lambda_A} + \frac{1}{\lambda_B} \qquad (8.62)$$

Se si volesse tenere conto dell'affidabilità del commutatore che determina l'azionamento del componente ridondante di sicurezza, si dovrebbe introdurre il parametro corrispondente R_C; l'affidabilità totale del sistema (sistema + commutatore), dunque, diverrebbe:

$$R_{ST} = R_S \cdot R_C \qquad (8.63)$$

Se risulta essere $R_C = 1$, si verifica che l'affidabilità del sistema stand by è superiore a quella del sistema parallelo di tipo attivo.

Nel caso dei sistemi riparabili, come già si è avuto modo di dire, gli studi si concentrano sulla disponibilità. In tali sistemi si determina un flusso di guasti e di riparazioni che danno luogo a periodi di tempo significativi dal punto di vista del sistema e dei suoi componenti (Fig. 8.12).

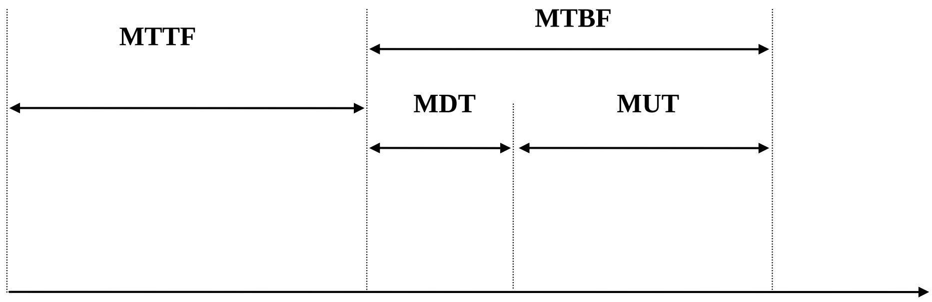

Fig. 8.12 - Flusso di guasti e riparazioni nei sistemi riparabili

All'intervallo di tempo MTTF già definito, fa seguito un periodo di mancato funzionamento durante il quale il sistema viene riparato: questo intervallo di tempo è noto con il nome di **Mean Down Time** (**MDT**).
Una volta riparato, il sistema rimane in funzionamento per un ulteriore intervallo di temporale che definisce un nuovo parametro, il **Mean Up Time** (**MUP**).
La somma dei due parametri appena individuati porta alla definizione di un nuovo termine, il **Mean Time Between Failure** (**MTBF**).
La **disponibilità A(t)** di un sistema è definita come la probabilità che un componente funzionante all'istante t = 0 non sia guasto all'istante t considerato. L'**indisponibilità Q(t)**, analogamente, rappresenta la probabilità che un componente funzionante all'istante t = 0, risulti guasto all'istante t.
Conseguentemente, deve essere verificata l'uguaglianza:

$$A(t) + Q(t) = 1 \qquad (8.64)$$

L'andamento della funzione A(t) è rappresentato nella successiva Figura 8.13, e vale 1 all'istante t = 0 e $\frac{MUT}{MUT + MDT}$ per t che tende all'infinito, come si desume dall'espressione 8.65.

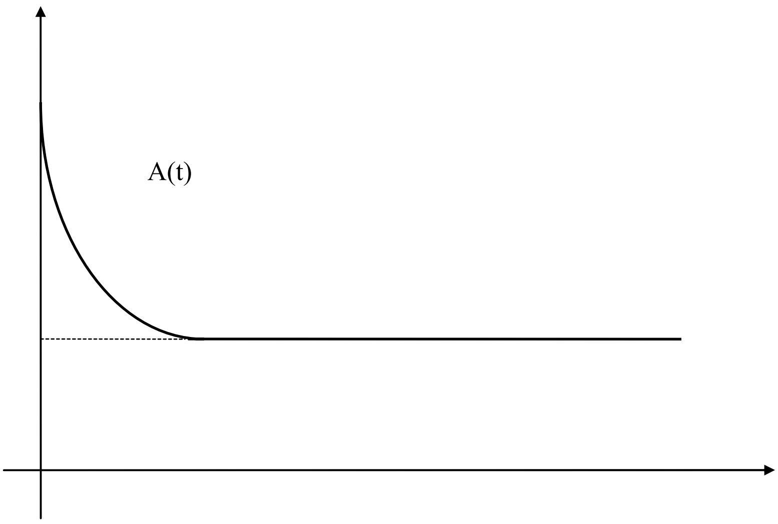

Fig. 8.13 - Andamento nel tempo della funzione disponibilità

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{MUT}{MUT + MDT} \quad (8.65)$$

Un'altra grandezza di interesse nella trattazione dei sistemi riparabili è la **manutenibilità M(t)**, la quale rappresenta la probabilità che il componente guasto all'istante t = 0 possa essere riparato all'istante t. Vale la seguente relazione:

$$\lim_{t\to\infty} M(t) = 1 \quad (8.66)$$

La densità di probabilità della manutenibilità è la funzione g(t):

$$g(t) = \frac{dM(t)}{dt} \quad (8.67)$$

da cui discende un altro parametro di interesse, il **Mean Time To Repair** (**MTTR**), che è il valor medio della distribuzione della manutenibilità:

$$MTTR = \int_0^\infty t \cdot g(t)\, dt = \int_0^\infty \left(1 - M(t)\right) dt \quad (8.68)$$

Analogamente al tasso di guasto, è possibile introdurre il **tasso di riparazione Z_g(t)**, tale che $Z_g(t) \cdot dt$ sia pari alla probabilità che il componente guasto venga riparato nel tempo infinitesimo dt. Con una dimostrazione analoga a quella già vista per il tasso di guasto, risulta essere:

$$Z_g(t) \cdot dt = \frac{dM(t)}{1 - M(t)} \tag{8.69}$$

Se il tasso di riparazione risulta essere costante e pari a μ, si può scrivere:

$$\mu \cdot dt = \frac{dM(t)}{1 - M(t)} \tag{8.70}$$

e quindi

$$\ln(1 - M(t)) = - \mu \cdot t + \text{cost.}$$
$$(1 - M(t)) = e^{-\mu t + \text{cost.}}$$
$$M(t) = 1 - e^{-\mu t + \text{cost.}} \tag{8.71}$$

Essendo M(0) = 0, allora:

$$M(t) = 1 - e^{-\mu t} \tag{8.72}$$

Discende che:

$$MTTR = \int_0^\infty e^{-\mu t} = \frac{1}{\mu} \tag{8.73}$$

La considerazione dei sistemi riparabili conduce ad analizzare, fra l'altro, anche sistemi in cui il **tasso di transizione** fra lo stato di funzionamento e lo stato di guasto rimanga costante nel tempo. In tale condizione, è possibile risalire ad una ***dipendenza di tipo statistico fra le riparazioni, e quindi gli stati di funzionamento dei sistemi, ed i guasti***, conducendo ad effettuare una analisi basata sui cosidetti **processi markoviani**.
Tale tipo di approccio consiste nel considerare il componente che può passare dallo stato di funzionamento (I) allo stato di guasto (II) e viceversa (Fig. 8.14).

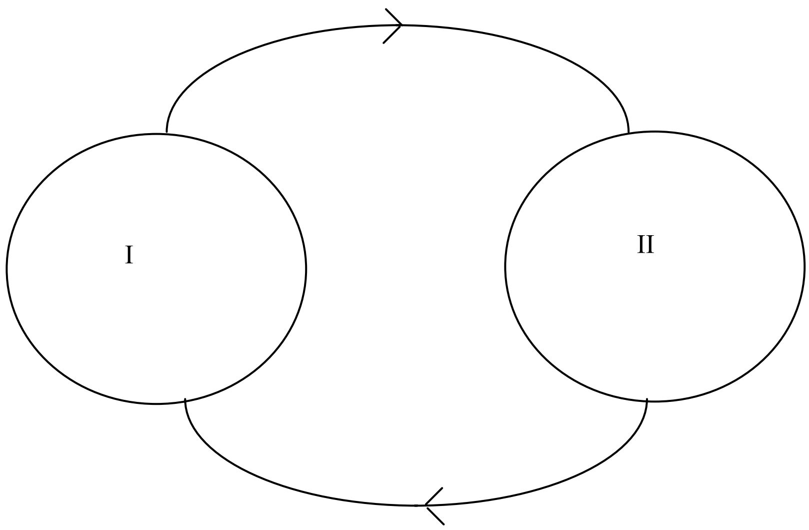

Fig. 8.14 - Analisi affidabilistica basata sui processi markoviani

La probabilità che il componente si trovi nello stato I all'istante t è data dalla disponibilità A(t), mentre la probabilità che si trovi nello stato II è pari all'indisponibilità Q(t), calcolata al medesimo istante.
Impostando il sistema di equazioni differenziali del sistema, sulla base delle condizioni al contorno A(0) = 1 e Q(0) = 0, discendono i valori di A e di Q di regime:

$$A(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \qquad Q(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \tag{8.74}$$

Questi valori appena trovati rappresentano in maniera significativa la disponibilità e l'indisponiilità del sistema poiché, se MTTF >> MTTR, cioè □<<□, allora il transitorio della funzione A(t) si esaurisce assai rapidamente ed è:

$$A(\infty) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\frac{1}{MTTR}}{\frac{1}{MTTR} + \frac{1}{MTTF}} = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR} = \frac{MTTF}{MTBF} \tag{8.75}$$

La trattazione degli studi affidabilistici si completa con la considerazione dei **guasti che si autoevidenziano** e quelli che **non si autoevidenziano**.
I guasti che non si autoevidenziano, infatti, richiedono una analisi periodica nel tempo per evitare che la situazione di guasto si manifesti solamente quando il componenente, o il sistema, viene chiamato ad un intervento (ad esempio, il caso di un sistema di sicurezza, tipo impianto antincendio). Nel caso dei guasti che si autoevidenziano, si può ricorrere alla teoria affidabilistica appena trattata.

Si supponga di considerare un sistema caratterizzato da tasso di guasto costante e guasto che non si autoevidenzia; in tal caso, l'affidabilità del sistema segue la legge esponenziale negativa e dunque decresce gradualmente nel tempo.
Per capire se il sistema ad un certo istante è funzionante è necessario chiamarlo in servizio oppure eseguire un test di controllo. Se il sistema viene periodicamente testato ad intervalli di tempo regolari T, allora è possibile introdurre il parametro **Probability of Failure On Demand** (**PFOD**) che, se è T>>MTTR (cioè la riparazione si considera istantanea) è definito dalla seguente espressione:

$$\mathrm{PFOD} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t)\, dt \qquad (8.76)$$

Tale parametro rappresenta la probabilità che un sistema soggetto ad un controllo periodico si guasti quando viene chiamato ad intervenire; esso viene calcolato basandosi sull'ipotesi di un intervento manutentivo periodico che riporta il sistema nelle sue condizioni iniziali, lasciando inalterato il tasso di guasto (se questo è costante).
La probabilità di buon funzionamento in un intervallo fra due interventi manutentivi (1 - p(t)), dunque, ha il significato di una affidabilità (Fig. 8.14). Si può scrivere, dunque:

$$p(t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (8.77)$$

e, se $\lambda t << 1$

$$p(t) = F(t) \approx \lambda \cdot t \qquad (8.78)$$

da cui

$$\mathrm{PFOD} = \frac{\lambda \cdot t}{2} \qquad (8.79)$$

Si vede così che, essendo il tasso di guasto costante, PFOD dipende esclusivamente da T.

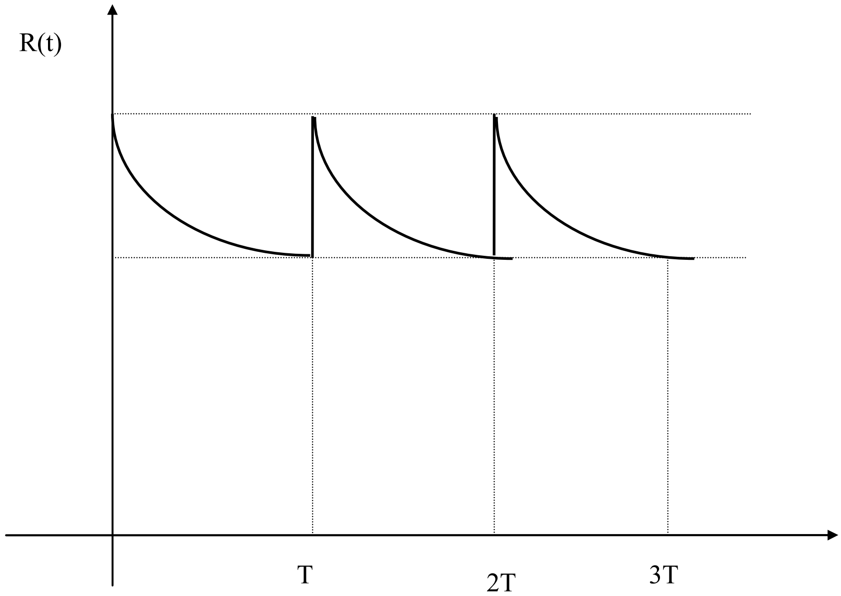

Fig. 8.15 - Affidabilità di un sistema in manutenzione periodica

6. RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI (DISPENSE 8 E 9)

[1] A.Mood, F.A. Gray Bill, D.C.Boes: "Introduzione alla statistica", Mc Graw Hill, 1974, Milano.

[2] R.Marcon, P.Marietti: "Introduzione alla misura delle grandezze fisiche", L.U. Japadre Editore, 1971.

[3] R.Billinton, R.N.Allan: "Reliability evaluation of engineering systems", Plenum Press, New York, 1992.