TEORIA DELL'UTILITÀ

E DECISION PROCESS

UTILITÀ

⇓

Classicamente sinonimo di Desiderabilità

⇓

Fisher (1930): "..... uno degli elementi che contribuiscono ad identificare la natura economica di un bene e sorge del rapporto che si instaura tra l'uomo e il bene stesso"

⇓

Marginalismo

⇓

L'utilità viene considerata "misurabile" (utilità in senso cardinale) matematicamente è ritenuta funzione della quantità di un bene.

⇓

Teoria paretiana (V. Pareto)

"Utilità non misurabile ma confrontabile"

⇓

(1944) Teoria dei giochi *à la* Von Neumann e Morgenstern "ritorno" della cardinalità.

UTILITÀ ORDINALE

X = insieme delle possibilità di scelta x, y, z = terna di scelte "appartenente ad X"

Giudizi esprimibili da un agente razionale

- Preferisco x ad y: $x \succ y$ ($\succ$ relazione di preferenza)
- Preferisco y ad x : $y \succ x$
- x ed y sono indifferenti = $x \sim y$

Condizioni di coerenza

(1) $x \succ y$ e $y \succ z \Rightarrow x \succ z$

(2) $x \succ y$ e $y \sim z \Rightarrow x \succ z$

(3) $x \sim y$ e $y \succ z \Rightarrow x \succ z$

(4) $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

X è organizzato con un **ordine quasi totale** (ossia relazione binaria con la proprietà riflessiva, transitiva e antisimmetrica.

Proprietà riflessiva: $x \ R \ x \quad \forall x \in X$

Proprietà transitiva: $x \ R \ y$ e $y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$

Proprietà (anti) simmetrica: $x \ R \ y$ e $y \, R \, x \Rightarrow x = y$

Nasce una **relazione d'ordine**

Nell'insieme delle possibilità di scelta X possiamo introdurre una "applicazione o funzione" tale che:

$$u: X \to R$$

nota come funzione di utilità ordinale, per cui

$(\bullet) \ x \succ y \Leftrightarrow \quad u(x) > u(y)$ (> maggiore)

$(\bullet\bullet) \ x \sim y \Leftrightarrow \quad u(x) = u(y)$ con $x, y \in X$ e $u(x), u(y) \in R$

Importante : tale funzione traduce numericamente l'ordinamento di preferenza espresso dall'agente economico. Analiticamente posso determinare, per uno stesso agente più f.d.u. ma....

Se consideriamo una funzione strettamente crescente φ del tipo

$$\varphi : R \to R$$

con $X \subseteq R$ ottengo la funzione composta

$$\varphi\left[\left(u(x)\right)\right] \qquad (1)$$

che esprime analiticamente un altro "oggetto" rispetto la $u(x)$ ma con riferimento allo stesso agente traduce lo stesso "ordinamento di preferenza". L'operazione (1) si definisce tecnicamente una **trasformazione monotona crescente** (t.m.c.).

TEOREMA

Una f.d.u. ordinale è univocamente determinata ***a meno*** *di una trasformazione monotona crescente (t.m.c.).*

UTILITÀ CARDINALE

TEOREMA

Si definisce funzione di utilità cardinale una funzione u: $X \rightarrow R$ *per la quale valgono le proprietà*

$(i)\ x \succ y \Leftrightarrow \quad u(x) > u(y)$

$(ii)\ x \sim y \Leftrightarrow \quad u(x) = u(y)$

e che sia univocamente determinata a meno di una trasformazione ***lineare*** *crescente (t.l.c.)* $\neq$ *(t.m.c.)*

IMPORTANTE: Si ottiene una t.l.c. moltiplicando e aggiungendo ad una f.d.u. di partenza una costante positiva *a* ed una costante arbitraria *b* ossia:

$U(x) = x \Rightarrow$ applico una t.l.c.

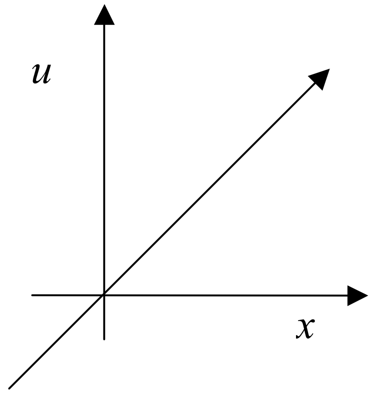
$\Rightarrow u(x) = a \quad x + b$

$$\Rightarrow u(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Moltiplico}}}{a}\ x \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Aggiungo}}}{+\ b}$$

PRINCIPALI FUNZIONI DI UTILITÀ
utilizzate nei DECISION PROCESSES

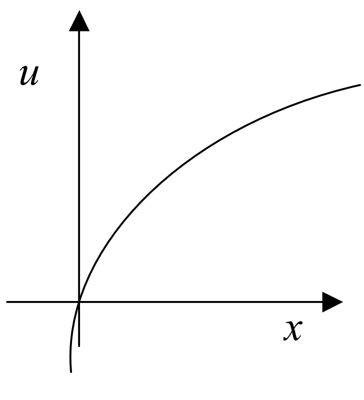
1) Funzione utilità lineare

$u\ (x)\ = x$

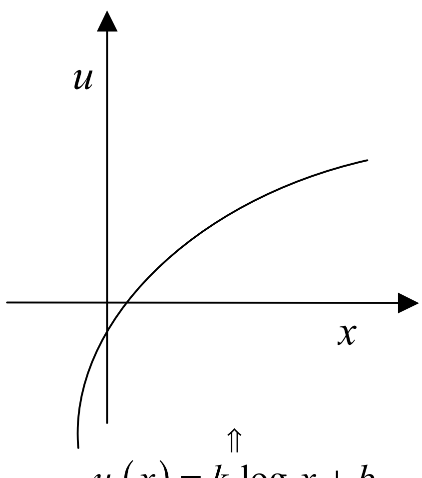


2) Funzione di utilità concava

$u'\left(x\right) \geq 0 \qquad u''\left(x\right) \leq 0 \qquad \forall\ x \in X$



$\subset$
(include)

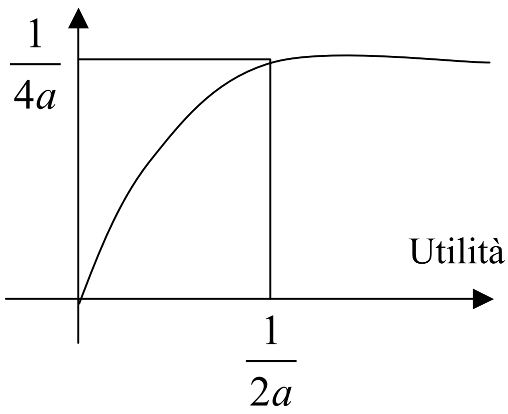


$\Uparrow$

$u\left(x\right) = k\ \log x + b$

3) Funzione di utilità quadratica

$$u(x) = x - a x^2 \qquad\qquad a > 0$$

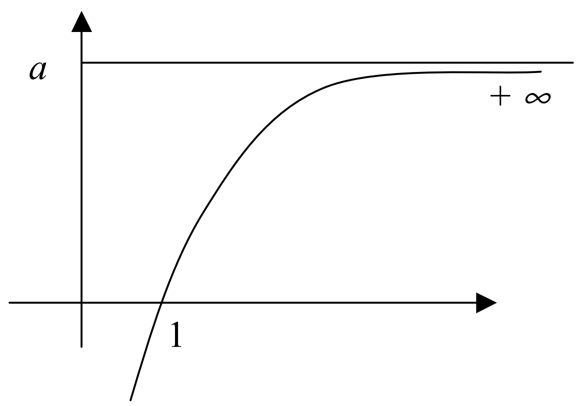


$$\begin{cases} \text{Crescente per } x < \dfrac{1}{2a} \\ \text{Costante per } x > \dfrac{1}{2a} \end{cases}$$

4) Funzione di utilità esponenziale

$u(x) = a\left[1 - e^{-x/a}\right]$ definita $\quad \forall x \in X$ *e* limitata superiormente

da *a essendo* $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = a$

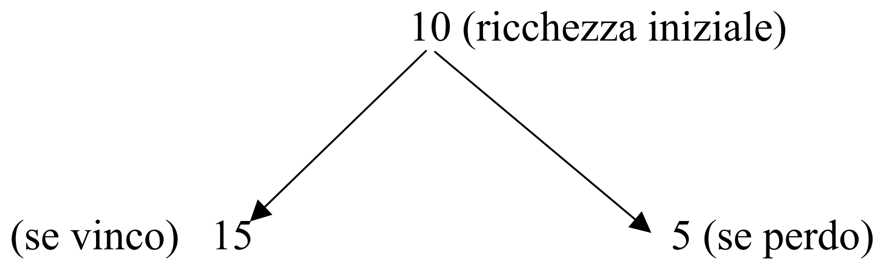


DEFORMAZIONE NELLA VALUTAZIONE SOTTO INCERTEZZA:

L'UTILITÀ ATTESA

Problema:

Abbiamo una somma di 10 euro. Facendo una scommessa ho il 50% di probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)$ di vincere 5 euro o di perdere – 5 euro.



Introducendo una funzione d'utilità $u(x)$ (del tipo $u : X \rightarrow$ R) ottengo:

1. L'utilità attesa

$$E\big(u(x)\big)=\frac{1}{2}\,u(15)+\frac{1}{2}\,u(5).$$

2. Il valore atteso della scommessa

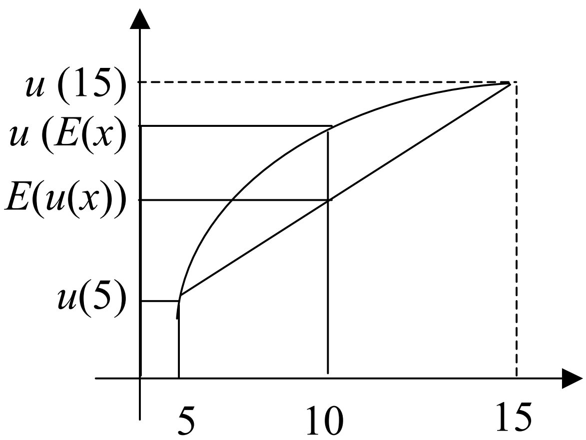
$$u\big(E(x)\big)=u\left(\frac{1}{2}(5)\right)+\frac{1}{2}(15)=u(10).$$

ma esiste una somma che il decisore considera "equivalente" alla somma aleatoria?

Certo equivalente: *ossia una somma certa che razionalmente e soggettivamente si giudica equivalente alla aleatoria.*

Bisogna distinguere i decisori – tipo in due categorie

1. Avversi al rischio

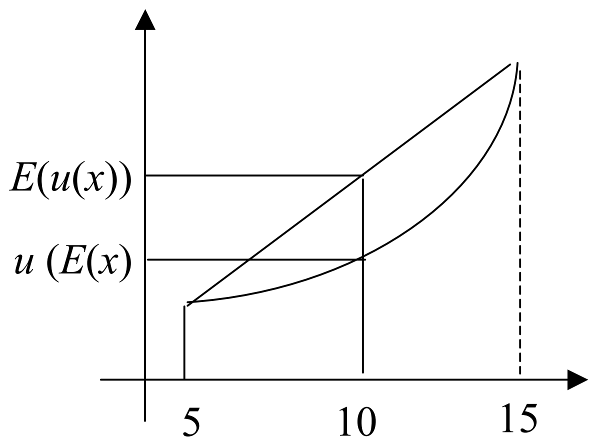


Funzione di utilità "concava"

$$u\left(\frac{1}{2}(5)+\frac{1}{2}(15)\right)>E\left(\frac{1}{2}u\ (5)\ +\ \frac{1}{2}\ u\ (15)\right)$$

$$u\left(E\left(x\right)\right)>E\left(u\left(x\right)\right)$$

2. Propensi al Rischio



Funzione di utilità "convessa"

$$E\big(u(x)\big) > u\ \big(E(x)\big)$$

Le funzioni di utilità considerate nei **Decision Processes** devono essere di classe C^2, continue e monotone.

TEOREMA

Sia f una funzione di classe C^2 nell'intervallo aperto I.

1) se f è "convessa" in I si ha

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$$

2) se f è "concava" in I allora

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$$

Case Study

Consideriamo due somme aleatorie *X*, *Y* stocasticamente indipendenti (ad es. i prezzi futuri di due “pacchetti azionari”) che oggi possiamo comprare con la stessa somma. Consideriamo le due *funzioni di ripartizione.*

$X \Rightarrow F(x) = P(X \leq x)$ e $Y \Rightarrow G(x) = P(Y \leq y)$

Fissiamo una soglia *s* per il valore del pacchetto e confrontiamo le due probabilità di “*superare”* quella soglia attraverso l’acquisto

$$1 - F(s) = P\ (X > s)\ ;\ 1 - G = P\ (Y > s)$$

supponiamo che $\forall\ s \Rightarrow P(X > s) \geq P\ (Y > s)$

Si dirà che X domina Y in base al 1° criterio di dominanza stocastica, si ha

$$X \succ_s Y$$

RISULTATO CENTRALE
IN TEORIA DELLE DECISIONI

$$\Downarrow$$

PARADIGMA DI RAZIONALITÀ

(SOTTO INCERTEZZA)

$$\Downarrow$$

CERTO EQUIVALENTE < VALORE ATTESO

Consideriamo tre somme aleatorie *X*, *Y*, *Z*. Individuiamo un sistema razionale di valutazione, attraverso quattro requisiti:

1) ogni somma aleatoria (*X,Y,Z* ha un certo equivalente $z[x]$
2) se X **non** è aleatorio ma è certo e ha un valore uguale a *c* il suo certo equivalente è

$$z\,[x] = c$$

3) se $X \succ_s Y \Rightarrow z\left[X\right] > z[Y]$
4) abbiamo due situazioni aleatorie

Situazione I ; Situazione II

$$\begin{cases} x & y \\ \downarrow & \downarrow \\ p & 1-p \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} z\left[x\right] & Y \\ \downarrow & \downarrow \\ p & 1-p \end{cases}$$

sit I ~ sit II

poichè $z\left[x\right] \simeq x$

Sia X una somma aleatoria con x_1, x_2, ... x_n con probabilità p_1, p_2...p_n. Qualora un sistema di valutazione soddisfi le condizioni – requisito introdotte, esisterà una deformazione u (f.d.u.) delle somme monetarie, continua e monotona crescente t.c.

$$z[x] \simeq E(u(x)) \qquad \text{ossia}$$

$$u(z) = u(x_1)\, p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u(x_n)\, p_n$$

Indice di avversione al rischio

Sia X una v.a. e $E(x)$ il suo valore atteso. Si parla di avversione al rischio quando un DM considera **equivalente** ad x una somma $z <$ del valore atteso

$$\underbrace{\pi(x)}_{\text{premio per il rischio}} = E(x) - z\,[x]$$

INDICE DI AVV. AL RISCHIO

(De Finetti – Arrow – Pratt (1964)) $\Rightarrow$ $r(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$

- Quanto maggiore è l'avv. al rischio tanto più grande è π e minore il certo equivalente.
- $z[x] < E(x) \Rightarrow u$ è concava $r(x) \geq 0$
- $z[x] > E(x) \Rightarrow u$ è convessa $r(x) \leq 0$

Esempio numerico

Consideriamo una funzione *u* del tipo

$$u(x) = -e^{-x/50}$$

e di voler valutare con essa la somma aleatoria di 50 mln

$$\begin{cases} 0 & 100 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{cases}$$

Avremo le

$$u(z) = u(x_1)\, p_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u(x_n)\, p_n$$

come

$$-e^{-x/50} = -\, e^{-0/50} \cdot \frac{1}{2} - e^{-100/50} \cdot \frac{1}{2}$$

ossia

$$-e^{-z/50} = \frac{1+e^{-2}}{2}$$

onde

$$z = -50 \cdot \left[\log\left(1+e^{-2}\right) - \log^2 \right] \simeq \underset{\Downarrow}{12{,}295}$$

certo equivalente