p.1

da (1.1) si ha $\varepsilon_{ilm} = (\hat{e}_i \wedge \hat{e}_l)\cdot\hat{e}_m$. Infatti il prodotto misto da il volume del parallelepipedo costruito con i 3 vettori con segno. Quindi se 2 indici sono uguali, i tre sono complanari ed il volume è nullo. Altrimenti

$$(\hat{e}_1\wedge\hat{e}_2)\cdot\hat{e}_3 = \hat{e}_3\cdot\hat{e}_3 = 1 = \hat{e}_2\cdot\hat{e}_2 = (\hat{e}_3\wedge\hat{e}_1)\cdot\hat{e}_2 = (\hat{e}_2\wedge\hat{e}_3)\cdot\hat{e}_1$$

$$(\hat{e}_2\wedge\hat{e}_1)\cdot\hat{e}_3 = -\hat{e}_3\cdot\hat{e}_3 = -1 = -\hat{e}_2\cdot\hat{e}_2 = (\hat{e}_1\wedge\hat{e}_3))\cdot\hat{e}_2 = (\hat{e}_3\wedge\hat{e}_2)\cdot\hat{e}_1 .$$

p.7

(1.12) $(A\hat{e}_1\wedge A\hat{e}_2)\cdot A\hat{e}_3 = \left[\varepsilon_{ijl}(A\hat{e}_1)_j(A\hat{e}_2)_l\,\hat{e}_i\right]\cdot\left[(A\hat{e}_3)_s\,\hat{e}_s\right] =$

$$= \varepsilon_{ijl}\,A_{jm}(\hat{e}_1)_m A_{ln}(\hat{e}_2)_n\,A_{sp}(\hat{e}_3)_p\,\hat{e}_i\cdot\hat{e}_s = \varepsilon_{ijl}A_{jm}\delta_{1m}A_{ln}\delta_{2n}A_{sp}\delta_{3p}\delta_{is} =$$

$$= \varepsilon_{sjl}\,A_{j1}A_{l2}A_{s3} = \varepsilon_{jls}\,A_{j1}A_{l2}A_{s3} = \overset{+1}{\varepsilon_{123}}A_{11}A_{22}A_{33} + \overset{-1}{\varepsilon_{132}}A_{11}A_{32}A_{23}$$

$$+ \overset{-1}{\varepsilon_{213}}A_{21}A_{12}A_{33} + \overset{+1}{\varepsilon_{231}}A_{21}A_{32}A_{13} + \overset{+1}{\varepsilon_{312}}A_{31}A_{12}A_{23} + \overset{-1}{\varepsilon_{321}}A_{31}A_{22}A_{13} = \det A$$

(1.13) $(A\hat{e}_2\wedge A\hat{e}_1)\cdot A\hat{e}_3 = (-A\hat{e}_1\wedge A\hat{e}_2)\cdot A\hat{e}_3 = -\det A$

$$= \varepsilon_{213}\det A = (\hat{e}_2\wedge\hat{e}_1)\cdot\hat{e}_3\,\det A$$

$$(A\hat{e}_3\wedge A\hat{e}_1)\cdot A\hat{e}_2 = (A\hat{e}_1\wedge A\hat{e}_2)\cdot A\hat{e}_3 = \det A = \varepsilon_{312}\det A = (\hat{e}_3\wedge\hat{e}_1)\cdot\hat{e}_2\,\det A$$

e così via.

p.8

(1.18) se $j=k$ fissato $\Rightarrow \sum_i A_{ik}A^c_{ik} = \sum_i A_{ik}(-1)^{i+k}\det A^{(ik)} = \det A = \delta_{kk}\det A$ I° Teorema di Laplace

se $j\neq k$ " $\Rightarrow \sum_i A_{ik}A^c_{ij} = \sum_i A_{ik}(-1)^{i+j}\det A^{(ij)} = 0 = \delta_{jk}\det A$

$\Rightarrow$ vale (1.19).

p.9-11
13-14

$(1,25)$ $\quad (AB)^c = A^c B^c$

Dim. nel caso A e B invertibili (se no il complementare è nullo)

Per il Teor. 1.10.1 si ha $(AB)^c = \left[\det(AB)\,(AB)^{-1}\right]^T = \det(AB)\left[(AB)^{-1}\right]^T =$

$$\overset{\substack{\text{Binet}\\(1.24)}}{=} \det A \det B \left[B^{-1}A^{-1}\right]^T \overset{(1.26)}{=} \det A \det B\ A^{-T} B^{-T} =$$

$$= \left[(\det A)\,A^{-T}\right]\left((\det B)\,B^{-T}\right) \overset{1.10.1}{=} A^c B^c$$

$(1,27)$ $\quad (A^c)^T = (A^T)^c$

Dim nel caso A invertibile col Teor. 1.10.1

$$\boxed{A^{cT} = \det A\ A^{-1}}$$

$$(A^T)^c = \left[\det A^T\,(A^T)^{-1}\right]^T = \det A\left[\left((A^{-1})^T\right)\right]^T = (\det A)\,A^{-1} = A^{cT}$$

$(1.39)_1$ $\quad \det B = \det\left[(\det A)\,(A^{-1})^T\right] = (\det A)^n \det (A^{-1})^T =$

$$= (\det A)^n \det(A^{-1}) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{poiché } AA^{-1}=I}}{=} (\det A)^n (\det A)^{-1} = (\det A)^{n-1}$$

Quindi $(A^c)^c \underset{(1.38)_2}{=} \det B\left(B^{-1T}\right) \underset{(1.39)_1}{=} (\det A)^{n-1}\left(\det A\ A^{-1T}\right)^{-1T} =$

$$\underset{(1.28)}{=} (\det A)^{n-1}(\det A)^{-1}\left((A^T)^{-1}\right)^{-1T} = (\det A)^{n-2}(A^T)^T = (\det A)^{n-2} A$$ tul

p.14 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n-1}{2}(n-1+1) = \frac{n-1}{2}\,n$ [illegible]

p.16 (1.46): $0 = S \cdot A = (S^S + S^A)\cdot A = S^S\cdot A + S^A\cdot A \overset{\substack{\text{Teorema}\\1.13.1}}{=} S^A\cdot A, \forall A.$ $\substack{=0\\ \in \mathrm{Sym}}$

CALCOLO DI COMPLEMENTARE E INVERSO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \det A = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

$$A^C_{11} = (-1)^{1+1} \det(1) = 1 \; ; \; A^C_{12} = (-1)^{1+2} \det(2) = -2$$

$$A^C_{21} = (-1)^{2+1} \det(2) = -2 \; ; \; A^C_{22} = (-1)^{2+2} \det(1) = 1$$

$$A^C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = (\det A)^{-1} A^{CT} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left[-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} (1-4) & (-2+2) \\ (2-2) & (-4+1) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = I$$ e analogamente per $A^{-1}A = I$

Esercizio con matrici 3 x 3 : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

§1.12

Calcolo in componenti del prodotto scalare fra operatori:

$$A \cdot B = \mathrm{tr}(AB^T) = (AB^T)_{ii} = (AB^T)_{ik}\delta_{ik} = A_{ij}(B^T)_{jk}\delta_{ik} = A_{ij}B_{kj}\delta_{ik} = A_{ij}B_{ij}$$

§1.15. Calcoliamo l'operatore inverso di R: data la proprietà $I = R^T R$, moltiplicare a destra per R^{-1}, si ha $R^{-1} = R^T (R R^{-1}) = R^T$. (1.54)

Per la (1.55) usiamo la (1.22): $A^c = A^{-1\,T} \det A$, e quindi si ha: $R^c = R^{-1\,T} \det R = (R^T)^T \det R = R \cdot 1 = R$ per la (1.53).

//

---

p. 22. Per dimostrare le proprietà abbiamo usato la proprietà (1.8) della traccia, e cioè $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB)$.

---

p.23. Dimostriamo la (1.65); dalla (1.64) si ha, per $n = 3$,

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (A_{11}-\lambda) & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & (A_{22}-\lambda) & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & (A_{33}-\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= (A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda)(A_{33}-\lambda) + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{31}(A_{22}-\lambda) -$$

$$- A_{23}A_{32}(A_{11}-\lambda) - A_{12}A_{21}(A_{33}-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2(A_{11}+A_{22}+A_{33}) -$$

$$- \lambda\left(\underset{\smile}{A_{22}A_{33}} + \underset{\frown}{A_{11}}A_{33} + \underset{\times}{A_{11}}A_{22} - \underset{\frown}{A_{13}}A_{31} - \underset{\smile}{A_{23}}A_{32} - \underset{\times}{A_{12}}A_{21}\right) + \det A\,;$$

osserviamo che $(A_{11} + A_{22} + A_{33}) = \mathrm{tr}\,A = I_1$ e che si ha

$$I_2 = \mathrm{tr}(A^c) \overset{(1.17)}{=\!=} (-1)^{i+i} \det A^{(ii)} = (-1)^{2i} \cdot \det A^{(ii)} = \det A^{(ii)} =$$

$$= |A^{(11)}| + |A^{(22)}| + |A^{(33)}| = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ \underset{\smile}{A_{32}} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} \underset{\frown}{} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} \underset{\times}{} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

Cambiando segno otteniamo la (1.65). //

---

p. 24 $$\frac{\partial J_m}{\partial A_{ij}} = \frac{\partial}{\partial A_{ij}} (A^m)_{kk} = m A^{(m-1)}_{kl} \frac{\partial (A_{lk})}{\partial A_{ij}} = m A^{(m-1)}_{kl} \delta_{li} \delta_{kj} = m A^{m-1}_{ji} = m (A^T)^{m-1}_{ij}.$$

(3.5) ③'

(a) $A_{ii} = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\, A' = A'_{ii}$

(b) $A_{ij} A_{ij} = A \cdot A = \| A \|^2 = \| RA\|^2 = \|A'\|^2$

(c) $A'_{ij} A'_{ik} A'_{kj} = A'_{ij} (A')^T_{jk} (A')^T_{ki} = \mathrm{tr}\left(A' A'^T A'^T\right)$

$$\|$$

$$\left((R^T)_{il} A_{lm} R_{mj}\right)\left((R^T)_{is} A_{sp} R_{pk}\right)\left(R^T_{ku} A_{uv} R_{vj}\right) =$$

$$= \underbrace{R_{li} A_{lm} R_{mj} R_{si}} A_{sp} \underbrace{R_{pk} R_{uk}} A_{uv} R_{vj} =$$

$$= \delta_{ls} A_{lm} \delta_{mv} \delta_{pu} A_{sp} A_{uv} = \underset{ij}{A_{sv}} \underset{ik}{A_{su}} \underset{kj}{A_{uv}} = A_{ij} A_{ik} A_{kj}$$

Alternativamente $\mathrm{tr}\left(A' A'^T A'^T\right) = \mathrm{tr}\left[R^T A \cancel{(R R^T)} A^T \cancel{R R^T} A^T R\right] =$

$= \mathrm{tr}\left[R^T (A A^T A^T) R\right] = \mathrm{tr}\left(A A^T A^T R R^T\right) = \mathrm{tr}\left(A A^T A^T\right)$.

(d) $\underset{\substack{-1 \;\; pkj \\ +1 \;\; pjk}}{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpj}} A_{ip} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pjk} A_{ip} = 2 \delta_{ip} A_{ip} = 2 A_{ii}$ e vale (A).

$$\|$$

$$2 I \cdot A$$

(3.6) (a) $D_{ij} x_j x_i = x_i D_{ij} x_j = x_i (Dx)_i = x \cdot Dx$

$$\|$$

$$D_{ij} (x_i \otimes x_j) = D \cdot (x \otimes x)$$

(b) $D_{ij} x_i x_j = D \cdot x \otimes x = 0$ per i) Teorema 1.13.1

(3.12) La risposta è NO. Verifichiamo con una semplice inversione del primo asse, si ha

$v' = (-v_1, v_2, v_3)$ e quindi $T' = \begin{pmatrix} -v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix}$,

$\neq$

mentre dovrebbe essere:

$$Q^T T Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix}$$

(3.18) (a) $(a \times b) \cdot a = (\varepsilon_{ijk} a_j b_k) a_i = \underline{\varepsilon_{ijk} a_i a_j b_k} =$

$= -\varepsilon_{jik} a_j a_i b_k \underset{\text{ponendo i al posto di j e j al posto di i}}{=} -\varepsilon_{ijk} a_i a_j b_k$ che è l'opposto di

quindi nullo.

(b) $(\varepsilon_{ijk} a_j b_k)(\varepsilon_{ilm} c_l d_m) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} a_j b_k c_l d_m =$

$= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m = a_l b_m c_l d_m -$

$- a_m b_l c_l d_m = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$ //

(Teorema 1.17.1) Data una matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, gli autovalori sono A_{11} e A_{22} e gli autovettori $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, poiché $A \hat{e}_1 = A_{11} \hat{e}_1$ e $A \hat{e}_2 = A_{22} \hat{e}_2$.

④

p. 25. La (1.28) è $(A^c)^c = (\det A)^{n-2} A$ e quindi, per $n=3$, vale la (1.71). Mentre dalla (1.41) $B^c(u \wedge v) = Bu \wedge Bv$ si ha la $(1.71)_{bis}$.

---

p. 26. Si ha $A^3 = I_1 A^2 - I_2 A + I_3 I$ e moltiplicando a destra per A^{-1} si ha $A^2 = I_1 A - I_2 I + I_3 A^{-1}$, dividendo per I_3 e spostando i membri si ottiene la (1.73). Poi facendo il trasposto moltiplicando per I_3 si ottiene la (1.74).

---

p. 27 Per $J_2 = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}\left[(A^2)^T\right] = \mathrm{tr}\left[(A^T)^2\right] =$

$= \mathrm{tr}(A^C) + I_1 \,\mathrm{tr}\, A^T - I_2 \,\mathrm{tr}\, I = I_2 + I_1^2 - 3I_2 = I_1^2 - 2I_2$,

mentre $J_3 = \mathrm{tr}(A^3) = I_1 \mathrm{tr}(A^2) - I_2 \,\mathrm{tr} A + 3I_3 = I_1^3 - 2I_2 I_1 -$

$- I_2 I_1 + 3I_3 = I_1^3 + 3(I_3 - I_1 I_2)$.

Infine la $(1.75)_3$ si ottiene da questa sostituendo le precedenti, cioè $I_3 = \frac{1}{3}(J_3 - J_1^3) + J_1 I_2 = \frac{1}{3}(J_3 - J_1^3) + \frac{1}{2} J_1 (J_1^2 - J_2)$.

Per la (1.73) si usa la (1.69) $\frac{\partial J_n}{\partial A} = n (A^T)^{n-1}$. Infatti

$$\frac{\partial I_1}{\partial A} = \frac{\partial J_1}{\partial A} = I \;; \quad \frac{\partial I_2}{\partial A} = \frac{1}{2}\left(2 J_1 \frac{\partial J_1}{\partial A} - \frac{\partial J_2}{\partial A}\right) = I_1 I - A^T \;;$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial A} = \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}(A^T)^2 - \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3} J_1^2 I + \frac{1}{2} 3 J_1^2 I - \frac{1}{2} J_2 I - \frac{1}{\cancel{2}} J_1 \cancel{2} A^T = (A^T)^2 - \cancel{I_1^2 I} + \cancel{\frac{3}{2} I_1^2 I} - \cancel{\frac{1}{2} I_1^2 I} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2} I_2 I - I_1 A^T \underset{(1.74)}{=} A^C .$$

Esercizio (3.15) (b): per $i=1,2,3$

$$\boxed{C_{ijk}\,A_{jk}} \underset{\text{proprietà di } C}{=} -C_{ikj}\,A_{jk} =$$

$$= -C_{ikj}\,A^{T}_{kj} \underset{\text{Asimmetrico}}{=} -C_{ikj}\,A_{kj} =$$

$$= -\sum_{k,j=1}^{3} C_{ikj}\,A_{kj} = -\Big[C_{i11}A_{11} + C_{i12}A_{12} + C_{i13}A_{13} +$$

$$+ C_{i21}A_{21} + C_{i22}A_{22} + C_{i23}A_{23} + C_{i31}A_{31} + C_{i32}A_{32} + C_{i33}A_{33}\Big] =$$

$$= -\sum_{j,k=1}^{3} C_{ijk}\,A_{jk} = \boxed{-C_{ijk}\,A_{jk}} \Rightarrow C_{ijk}\,A_{jk} = 0,\ \forall i=1,2,3.$$

(3.19) $$\left[\underline{d} \times (\underline{b} \times \underline{c})\right]_i = \varepsilon_{ijl}\, d_j \left(\varepsilon_{lmn}\, b_m c_n\right) =$$

$$= \varepsilon_{ijl}\,\varepsilon_{mnl}\, d_j b_m c_n = \left(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\right) d_j b_m c_n =$$

$$= d_n b_i c_n - d_m b_m c_i = \left[(\underline{d}\cdot\underline{c})\,\underline{b} - (\underline{d}\cdot\underline{b})\,\underline{c}\right]_i,\ i=1,2,3.$$

p.29, § 1.18.2. Per una diade si ha $I_1 = \operatorname{tr} T = u \cdot v$,

$I_3 = \det T = 0$, $I_2 = \operatorname{tr}(T^c) = (-1)^{2i} \det T^{(ii)} = |T^{(11)}| + |T^{(22)}| +$

$$+ |T^{(33)}| = \begin{vmatrix} u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 \end{vmatrix} = d_2 u_3 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ u_1 u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_1 u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0 \Longrightarrow$$ per la

(1.66) si ha $0 = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 = \lambda^2 (\lambda - u \cdot v) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = u \cdot v$. Sostituendo nell'equazione per gli autovettori $T w = \lambda w$ si ottengono: $(\underline{v} \cdot \underline{w}_i)\,\underline{u} = \underline{0}$ per $i=1,2$, cioè $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ ortogonali a v e fra di loro, mentre per $i=3$ si ha $(\underline{v} \cdot \underline{w}_3)\,\underline{u} = (\underline{v} \cdot u)\,\underline{w}_3$, cioè $\underline{w}_3 = \underline{u}$ quale terzo autovettore. Osserviamo che $\underline{w}_3$ non è $\perp$ a $\underline{w}_1$ e $\underline{w}_2$ in generale poiché $\underline{T}^T \neq \underline{T}$.