3. OPERAZIONI SUI TENSORI.

3.1. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

(a) $\delta_{pq} \; A_{qr} = A_{pr}$;

(b) $\delta_{pq} \; \delta_{qr} = \delta_{pr}$;

si (c) $\delta_{pq} \; \delta_{qr} \; \delta_{rs} = \delta_{ps}$;

(d) $\delta_{ii} = 3$;

(e) $\delta_{pq} \; A_{qrs} = A_{prs}$;

si (f) $\delta_{pq} \, \delta_{qr} \, \delta_{rs} \, \delta_{sp} = 3$;

si (g) $e_{1km} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{k2m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

si (h) $\delta_{ik} \; e_{ikm} = (0,0,0)$;

(i) $e_{iks} \; e_{mks} = 2\delta_{im}$;

(l) $e_{ikm} \; e_{ikm} = 6$;

si (m) $(P_{ijk} + P_{jki} + P_{jik}) x_i \; x_j \; x_k = 3 \; P_{ijk} \; x_i \; x_j \; x_k$.

3.2. Dimostrare che

$$e_{ijk} \; e_{mnk} = \delta_{im} \; \delta_{jn} - \delta_{in} \; \delta_{jm} \quad .$$

Si 3.3. Dimostrare le seguenti uguaglianze :

(a) $$e_{ijk}\, e_{mjk}\, e_{mpq} = 2\delta_{im}\, e_{mpq} = 2e_{ipq} \;;$$

(b) $$e_{ijk}\, e_{jkp}\, e_{lpi} = 0 \;;$$

(c) $$e_{ijk}\, a_j\, a_k = (0,0,0) \;.$$

3.4. Calcolare la parte simmetrica D_{ij} e la parte emisimmetrica E_{ij} del tensore T_{ij} di componenti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Verificare che $T_{ij} = D_{ij} + E_{ij}$ e determinare il vettore associato alla parte emisimmetrica.

3.5. Provare che le quantità seguenti sono invarianti sotto un generico cambiamento di coordinate, facendo la verifica diretta :

(a) A_{ii} ;

x casa (b) $A_{ij}\, A_{ij}$;

(c) $A_{ij}\, A_{ik}\, A_{kj}$;

(d) $e_{ijk}\, e_{kpj}\, A_{ip}$.

3.6. Espandere e semplificare dove possibile l'espressione

$D_{ij}\, x_i\, x_j$ se .

(a) $D_{ij} = D_{ji}$, $D_{ij}\, x_i x_j = D_{Sij}\, x_i x_j$

(b) $D_{ij} = - D_{ji}$.

3.7. Mostrare che $B_{ij} = e_{ijk}\, a_k$ è antisimmetrico.

3.8. Mostrare che la forma quadratica $D_{ij}\, x_i\, x_j$ è inalterata se a D_{ij} si sostituisce la sua parte simmetrica.

3.9. Se un tensore ha componenti:

$$T_{rs} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

ha le stesse componenti in ogni sistema di riferimento.

3.10. Siano A_{ij} le componenti di un tensore.

(a) La terna $v_k = e_{kij}\, A_{ij}$ dà le componenti di un vettore?

(b) La terna $\{ A_{11}, A_{12}, A_{13} \}$ è un vettore?

3.11. Sia p uno scalare.

(a) La terna (p,p,p) dà le componenti di un vettore?

(b) La tabella

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

dà le componenti di un tensore ?

3.12. Siano v_1, v_2, v_3 le componenti di un vettore. La tabella

$$T_{rs} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{bmatrix}$$

dà un tensore?

3.13. Sia $\underline{v}$ un vettore di componenti v_1, v_2, v_3 . Sono scalari le quantità seguenti?

(a) $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$,

(b) $v_1 + v_2 + v_3$.

3.14. Siano v_i le componenti di un vettore.
Le tabelle che seguono hanno carattere tensoriale?

(a) $$T_{rs} = \begin{bmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ -v_1 & 0 & v_3 \\ -v_2 & -v_3 & 0 \end{bmatrix} ;$$

(b) $$Q_{rs} = \begin{bmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{bmatrix} .$$

3.15. Sia A_{ij} un tensore simmetrico,

(a) se B_{ij} è antisimmetrico, quanto vale $A_{ij} B_{ij}$?

(b) se C_{ijk} è antisimmetrico negli indici j e k (cioè $C_{ijk} = - C_{ikj}$), quanto vale $C_{ijk} A_{jk}$?

3.16. Verificare che se un tensore è simmetrico in un particolare riferimento, lo è in tutti. La stessa proprietà vale per la emisimmetria?

3.17. Dato un generico tensore antisimmetrico T_{rs} trovare un cambiamento di riferimento che lo porta nella forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T'_{23} \\ 0 & -T'_{23} & 0 \end{bmatrix} .$$

3.18. Provare le uguaglianze seguenti facendo uso dei tensori di Ricci e di Kronecker:

(a) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{a} = 0$;

(b) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c})$;

(c) $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{a} \cdot \underline{b})^2 = a^2\, b^2$.

3.19. Dimostrare che: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$.

3.20. Provare che $\underline{p} \times (\underline{q} \times \underline{r}) + \underline{q} \times (\underline{r} \times \underline{p}) + \underline{r} \times (\underline{p} \times q) = \underline{0}$,

(a) applicando il risultato del Pb. 3.19. ,

(b) con l'uso della notazione in componenti e del tensore di Ricci.

3.21. (<u>Associatività del prodotto vettoriale</u>). Far vedere che: Condizione necessaria e sufficiente perchè sia

$$(\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w} = \underline{u} \times (\underline{v} \times \underline{w})$$

è che sia $(\underline{u} \times \underline{w}) \times \underline{v} = 0$.

Discutere (il Teorema nei) ~~i~~ casi in cui $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, oppure $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$.

3.22. Provare che:

$$\underline{p} \times \left[(\underline{a} \times \underline{q}) \times (\underline{b} \times \underline{r}) \right] + \underline{q} \times \left[(\underline{a} \times \underline{r}) \times (\underline{b} \times \underline{p}) \right] + \underline{r} \times \left[(\underline{a} \times \underline{p}) \times (\underline{b} \times \underline{q}) \right] = \underline{0} .$$

3.23. Provare che:

$$\underline{p}[\underline{q} \cdot (\underline{r} \times \underline{s})] - \underline{q}[\underline{r} \cdot (\underline{s} \times \underline{p})] + \underline{r}[\underline{s} \cdot (\underline{p} \times \underline{q})] + \underline{s}[\underline{p} \cdot (\underline{q} \times \underline{r})] = \underline{0} .$$

3.24. Provare che $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \left[(\underline{b} \times \underline{c}) \times (\underline{c} \times \underline{a}) \right] = \left| \underline{a} \cdot \underline{b} \times \underline{c} \right|^2$.

3.25. Sia assegnata una generica diade $T_{rs} = v_r w_s$.

(a) Determinare un cambiamento di riferimento che la porta nella forma :

$$\begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

(b) Se $\underline{v} = \underline{w}$ si può semplificare ulteriormente?

(c) Verificare che il vettore associato alla parte antisimmetrica di T_{rs} è uguale al prodotto vettoriale di $\underline{v}$ e $\underline{w}$.

3.26. Quali sono delle condizioni <u>necessarie</u> perchè un tenso re T_{rs} si possa scrivere nella forma $v_r w_s$, con $\underline{v}$ e $\underline{w}$ vettori?

3.27. Siano $\underline{v}$ e $\underline{w}$ due vettori di componenti $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$ rispettivamente. Si scriva la diade $T_{rs} = v_r w_s$; si determini un cambiamento di riferimento che porta T_{rs} nella forma indicata nel Probl. 3.25. E' unico un tale cambiamento? Ci sono vettori che conservano le stesse componenti in tale cambiamento di riferimento?

3.28. Siano A_{rs} e B_{rs} due tensori simmetrici. Il tensore $C_{rs} = A_{rk} B_{ks}$ è simmetrico?

3.29. Dimostrare che se B_{rs} è simmetrico e A_{rs} è qualunque, il tensore

$$C_{rs} = A_{kr} B_{ki} A_{is}$$

è simmetrico.

3.30. Provare che se le componenti di $C_{rs} = A_{rk} A_{sk}$ sono tutte nulle, allora A_{rs} ha componenti tutte nulle.

3.31. Provare con un controesempio che il tensore $D_{rs} = A_{rk} A_{ks}$ invece può avere tutte le componenti nulle, mentre A_{rs} non ha tutte le componenti nulle.

3.32. Sia A_{rs} un tensore simmetrico , tale che il prodotto $A_{rs}\, B_{sk}$ sia simmetrico per ogni tensore B_{sk} antisimmetrico. Si provi che A_{rs} ha tutte le componenti nulle.

3.33. Sia $\underline{d}$ un vettore non nullo. Provare che condizione necessaria e sufficiente perchè $\underline{d} \otimes \underline{u}$ sia un tensore antisimmetrico è che $\underline{u}$ sia nullo.