

Esercizio 1 (2 punti)

Stabilire se la seguente base $B = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$ è ortonormale.

Esercizio 2 (3 punti)

Stabilire se il seguente sistema lineare ammette soluzioni al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, ed in caso affermativo determinarle:

$$\begin{cases} kx + 2y + z = 0 \\ 3x - 2kz = -k \\ x - z = -1 \end{cases}$$

Esercizio 3 (5 punti)

Sia data la seguente applicazione lineare:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2y + 2z, -x + z).$$

- Scrivere la matrice associata rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio
- Determinare autovalori, autospazi e autovettori di tale applicazione lineare. Stabilire se A è diagonalizzabile e in tal caso scrivere la matrice D diagonale e la matrice P invertibile tali che A sia diagonalizzabile.
- Trovare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare, una base del nucleo e una base dell'Immagine
- Scrivere la matrice associata rispetto alla base $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 0, 3)\}$ nel dominio e nel codominio